

02 – Un poco matematica



¡Cada cantidad en física tiene una unidad!

Estas unidades en física pueden ser por ejemplo metros para longitud o años para tiempo o gramos para masa.

Algunas cantidades tienen unidades combinadas. Por ejemplo, una velocidad tiene unidades longitud dividido por tiempo, es decir, metros/segundos.

¡Si escriben una cantidad física sin unidades o con las unidades incorrectas, la respuesta es incorrecta, aunque el valor numérico podría ser correcto!

Sistema Internacional SI

El sistema internacional de Unidades consista de siete (7) unidades básicas:

- Longitud: metro (m)
- Tiempo: segundo (s)
- Masa: kilogramo (kg)
- Corriente eléctrica: amperio (A)
- Temperatura: Kelvin (K)
- Cantidad de sustancia: mol (mol)
- Intensidad luminosa: candela (cd)

Unidades en Astronomía

En astronomía usamos algunas unidades especiales:

Longitud:

$$1 \text{ AU (unidad astronómica)} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$1 \text{ pc (parsec)} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ m}$$

Tiempo:

$$1 \text{ yr (año)} = 3.15582 \cdot 10^7 \text{ s}$$

Masa:

$$1 M_{\odot} \text{ (masa solar)} = 1.9884 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Usamos el sistema internacional para escribir números. Las unidades de mil están separadas por una coma y los decimales están separados por un punto.

10,400 = diez mil cuatrocientos

2.5 = dos y media

Esto es exactamente opuesto al sistema chileno (también utilizado en Alemania). Pero leerá muchos libros y publicaciones en inglés, por lo que es mejor aprenderlo desde el principio.

Multiples de 10

1	=	10^0		(unidad)	
10	=	10^1		(deca)	
100	=	10^2	10x10	(hecto)	
1000	=	10^3	10x10x10	kilo	k
10,000	=	10^4	10x10x10x10		
1,000,000	=	10^6		Mega	M
		10^9		Giga	G
		10^{12}		Tera	T
		10^{15}		Peta	P
		10^{18}		Exa	E

0.1	=	10^{-1}	1/10	deci	d
0.01	=	10^{-2}	1/(10x10)	centi	c
0.001	=	10^{-3}	1/(10x10x10)	mili	m
0.000 1	=	10^{-4}	1/(10x10x10x10)		
		10^{-6}		micro	μ
		10^{-9}		nano	n
		10^{-10}	(solo longitud)	Ångstrom	Å
		10^{-12}		pico	p
		10^{-15}		femto	f

Reglas de matematica:

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$$

$$10^{-a} = \frac{1}{10^a}$$

$$\left(10^a\right)^b = 10^{a \cdot b}$$

Redondear

En física y astronomía conocemos cantidades solo con cierta precisión.

Pero si calculamos con estas cantidades, es decir, multiplicamos o dividimos, obtenemos resultados muy precisos de muchos dígitos. Por ejemplo, si usamos una buena calculadora para calcular $1.0 / 7.0$ obtenemos 0.142857142857143.

¿De verdad creen que si conocemos las cantidades solo con un dígito, conocemos el resultado con 15 dígitos solo porque la calculadora lo dice?

Por lo tanto, necesitamos redondear el resultado a la misma cantidad de dígitos que los números que hemos usado para calcular este resultado.

Para redondear correctamente tenemos que fijarnos en el siguiente dígito, no queremos usar más.

Si este dígito es 0, 1, 2, 3 o 4, redondeamos hacia abajo y dejamos el dígito anterior como está.

Si el siguiente dígito es 5, 6, 7, 8 o 9 sumamos 1 al dígito anterior, redondeamos hacia arriba.

$$1.0 / 7.0 = 0.142857142857143 \approx 0.1$$

$$8.01 / 3.21 = 2.495327102803738 \approx 2.50$$

$$4.2 \cdot 5.63 = 23.646 \approx 23.6$$

Con cada redondeo introducimos errores en nuestro cálculo.

Es prudente realizar primero todas las transformaciones necesarias con ecuaciones hasta que tengamos una expresión para la cantidad buscada, solo usando variables.

Solo al final insertamos los valores de las variables y obtenemos el resultado (que podemos redondear).

Laboratorio para la casa

- Escribe 100 veces: "Todas las cantidades físicas tienen unidades."

Trigonometria

Trigonometria

Una rama de matemática – la medición de triangulos

La palabra viene de griego:

τριγωνος = trigonos = triangulo

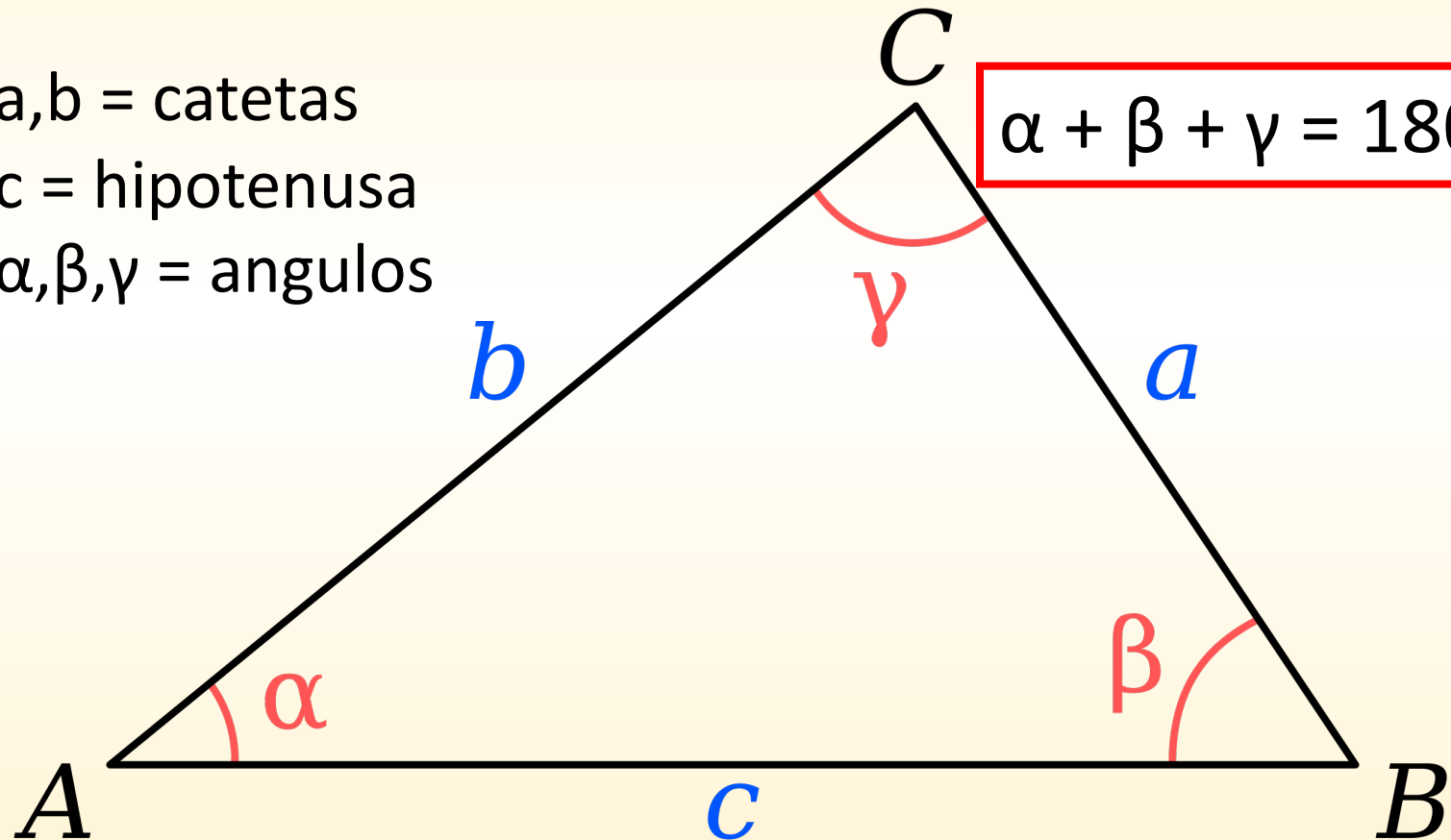
μετρον = metron = medida

Triangulo plano

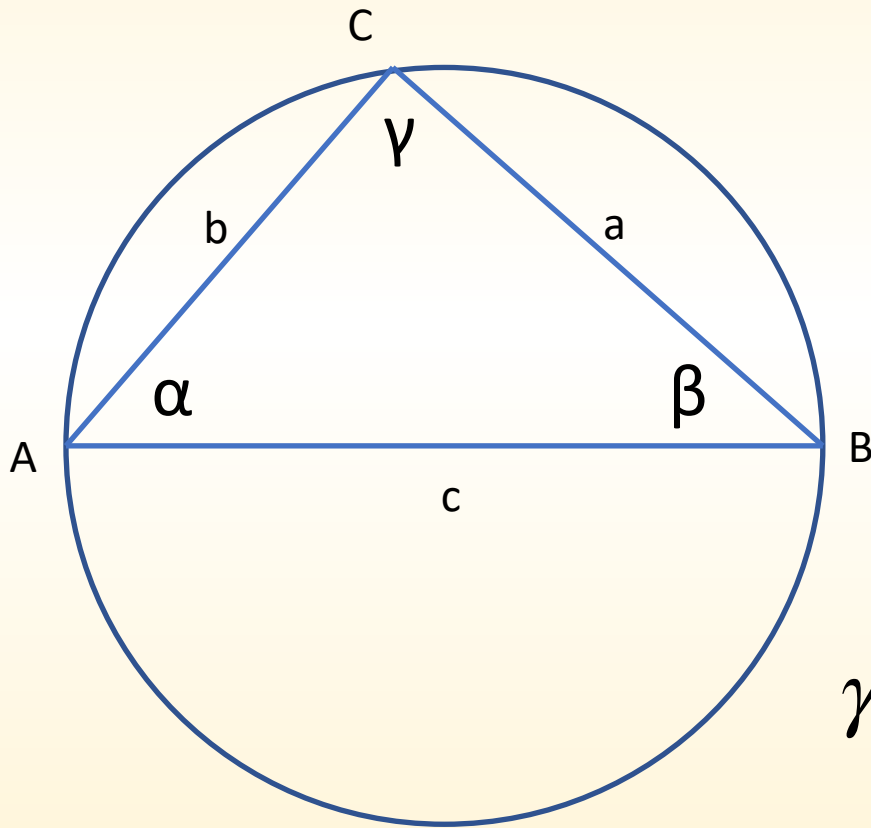
a, b = catetas

c = hipotenusa

α, β, γ = angulos



Teorema de Pitágoras



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$\gamma = 90^\circ$ = angulo recto

Angulos

En la medición de angulos hay dos (2) sistemas:

- grado sexagesimal: un circulo completo = 360°

(D o DEG)

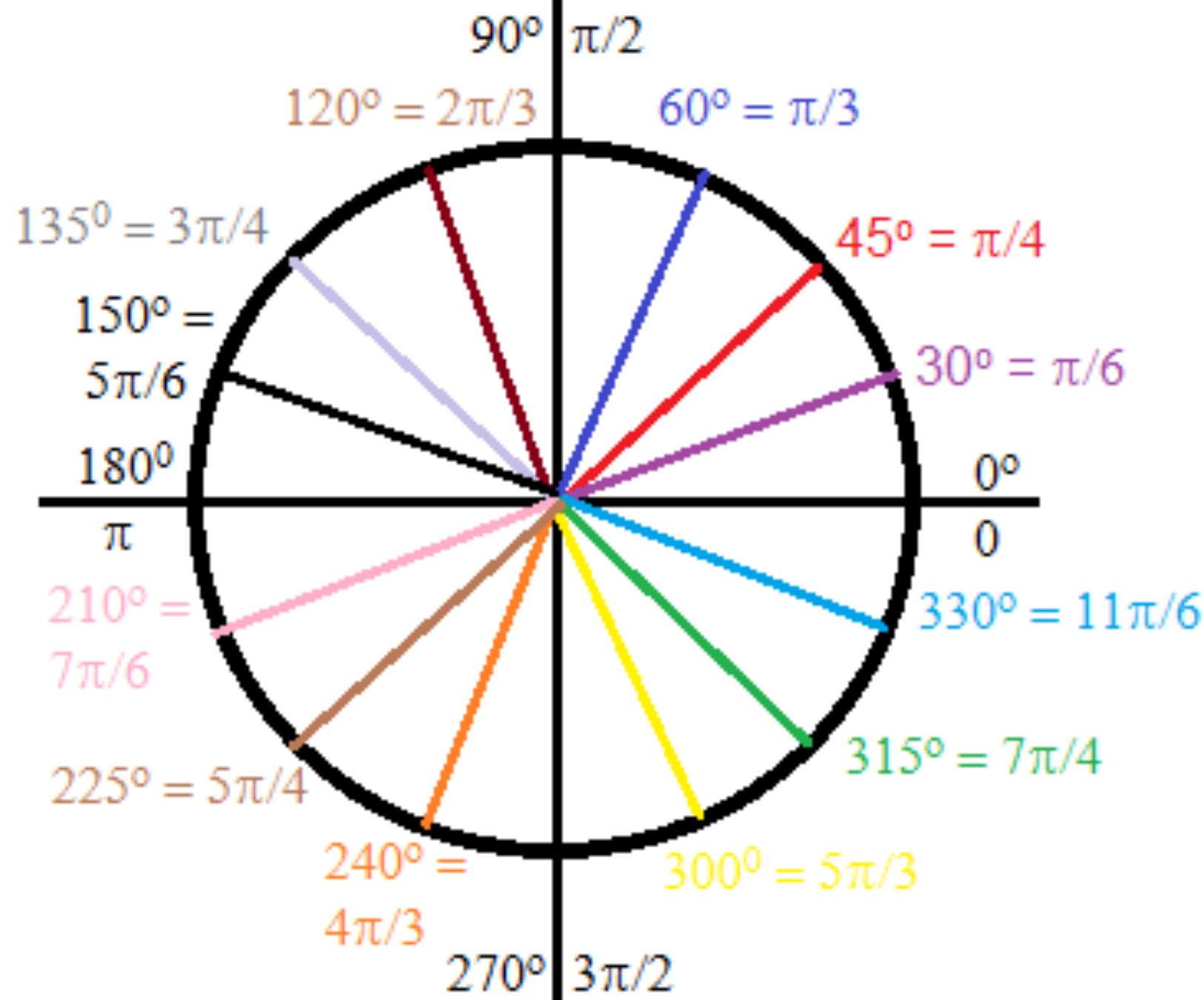
- sistema radián: un circulo completo = 2π

(R o RAD)

Pi: $\pi = 3.14159265358979323846... \approx 3.14$



¡Revise su calculadora antes de usar si muestra grados (D o DEG) o radianes (R o RAD)!



Funciones trigonométricas

c: hipotenusa

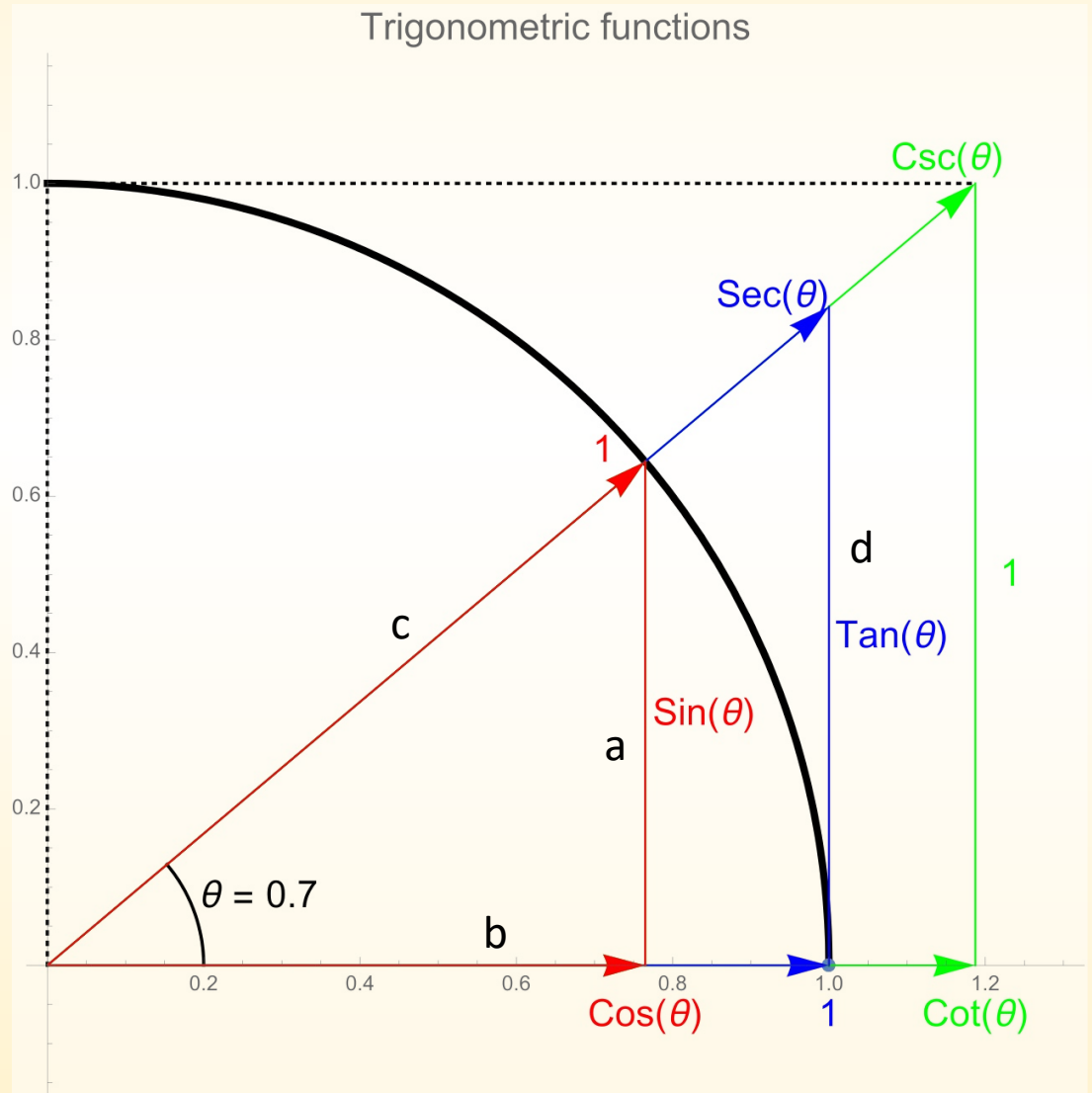
b: catedo adyacente

a: catedo opuesto

$$\sin \theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}$$



seno (sinus) = catedo opuesto / hipotenusa

coseno (cosinus) = catedo adyacente / hipotenusa

tangente (tangens) = catedo opuesto / catedo adyacente

En un circulo del radio $r = 1 \rightarrow c = 1$ tenemos:

$$\sin \theta = a$$

$$\cos \theta = b$$

$$\tan \theta = d$$

en radians

Función	Abreviatura	Equivalencias en radianes
Seno	sin	$sen \theta = \frac{1}{csc \theta} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{cos \theta}{cot \theta}$
Coseno	<u>cos</u>	$cos \theta = \frac{1}{sec \theta} = sen \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{sen \theta}{tan \theta}$
Tangente	tan	$tan \theta = \frac{1}{cot \theta} = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{sen \theta}{cos \theta}$
Cotangente	<u>cot</u>	$cot \theta = \frac{1}{tan \theta} = tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{cos \theta}{sen \theta}$
Secante	<u>sec</u>	$sec \theta = \frac{1}{cos \theta} = csc \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{tan \theta}{sen \theta}$
Cosecante	<u>csc</u>	$csc \theta = \frac{1}{sen \theta} = sec \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{cot \theta}{cos \theta}$

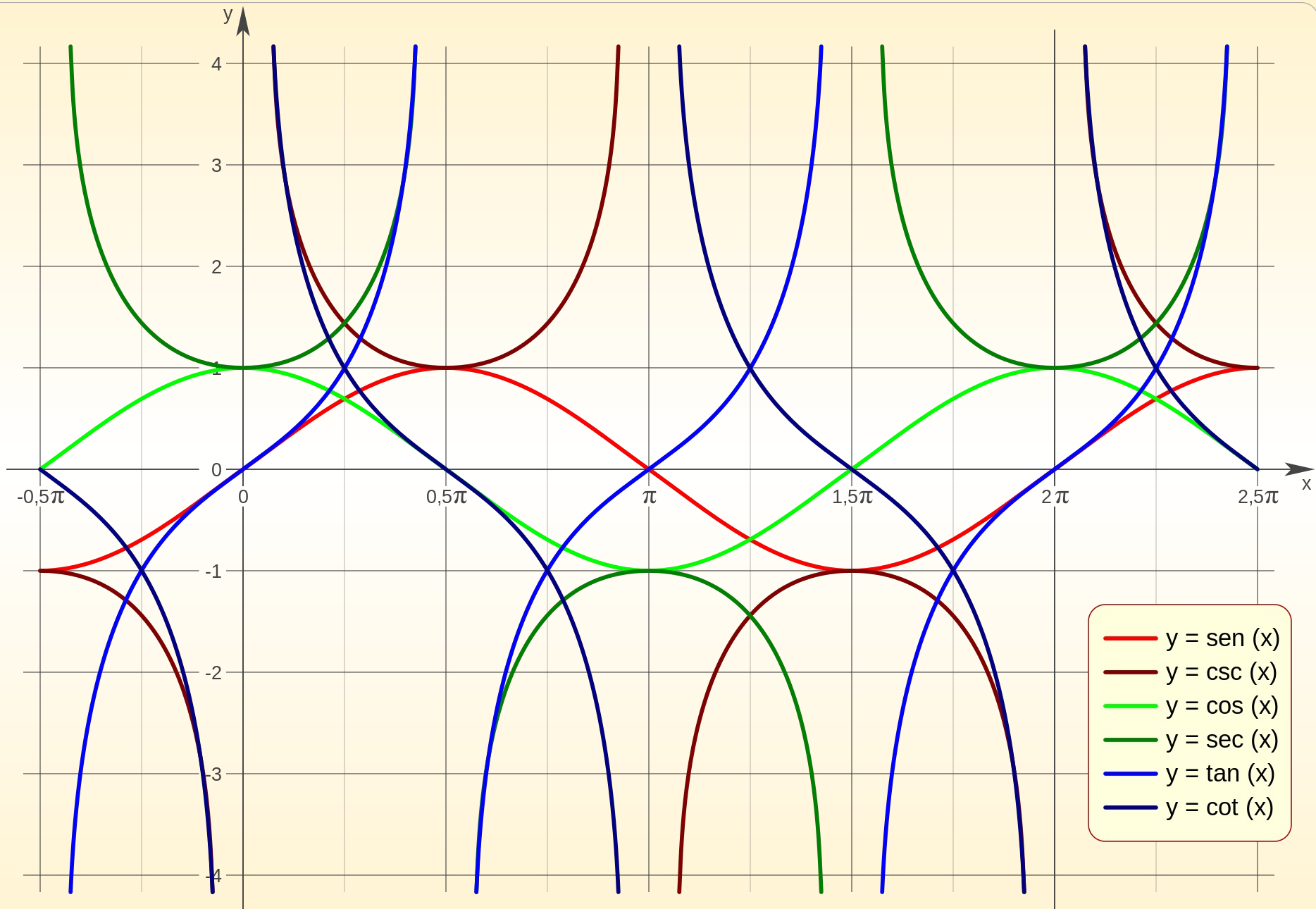


TABLA DE ANGULOS NOTABLES

RADIANES	GRADOS	SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE	SECANTE	COSECANTE
0	0°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$2\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Indefinido	0	Indefinido	1
π	180°	0	-1	0	Indefinido	-1	Indefinido
$\frac{3}{2}\pi$	270°	-1	0	Indefinido	0	Indefinido	-1
2π	360°	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido

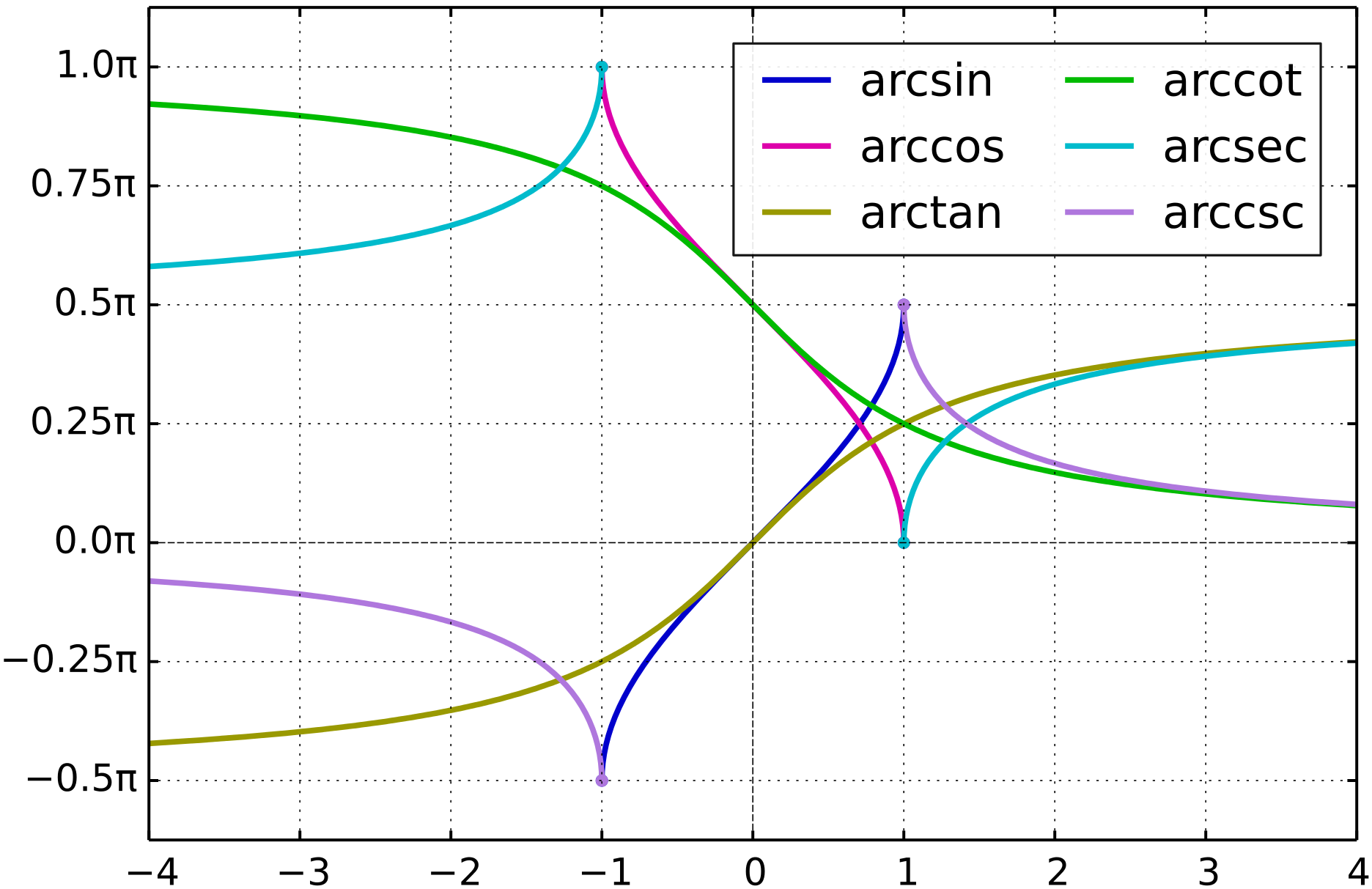
Funciones inversas

$$y = \sin(x) \rightarrow x = \arcsin(y)$$

$$y = \cos(x) \rightarrow x = \arccos(y)$$

$$y = \tan(x) \rightarrow x = \arctan(y)$$

$$\pi = 4.0 \cdot \arctan(1.0)$$



Laboratorio para la casa

- Encuentre una calculadora de bolsillo con funciones trigonométricas y descubra cómo usarla y cómo cambiar de GRAD a RAD y viceversa.

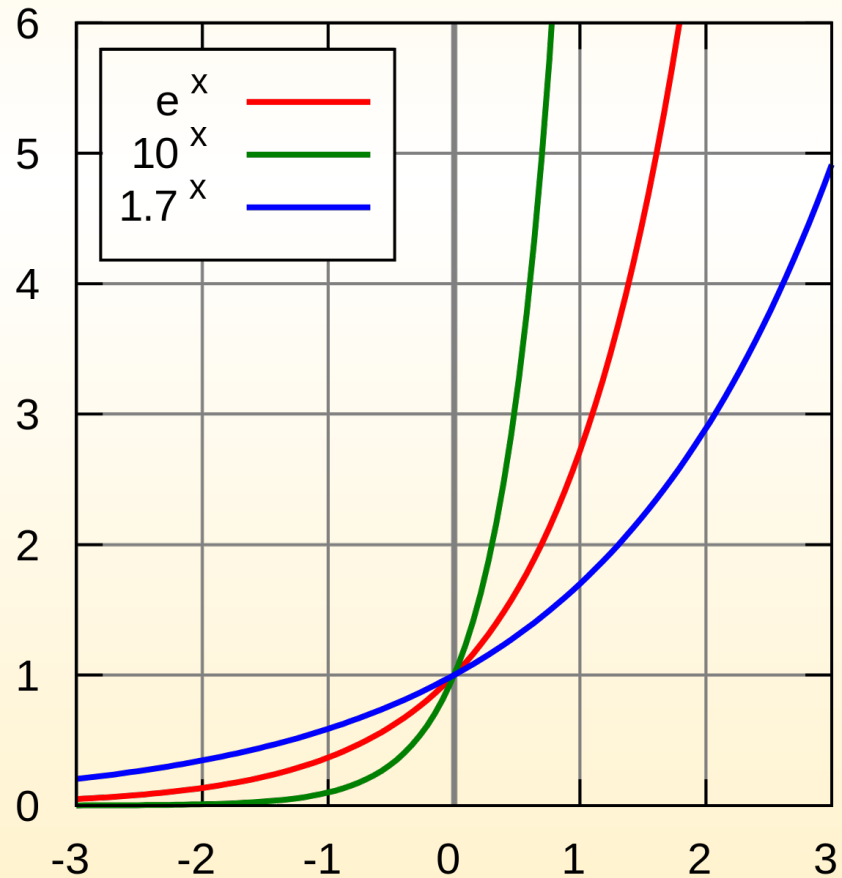
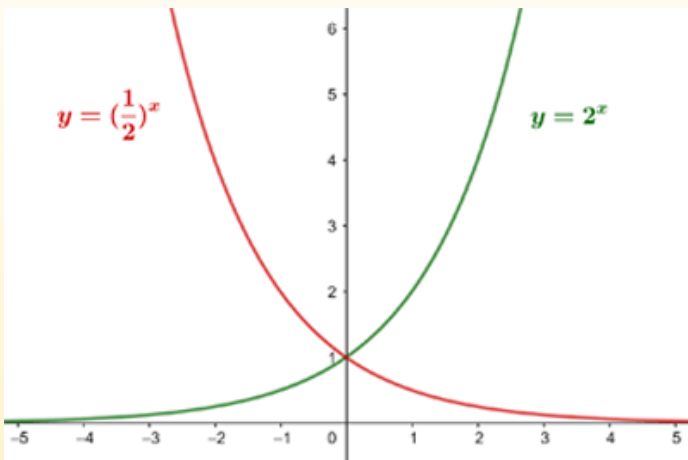
Función Exponencial y Logaritmo

En matemática una función exponencial es una función de forma:

$$y = f(x) = a^x$$

en el que el argumento x se presenta como un exponente.

si $a < 1$:

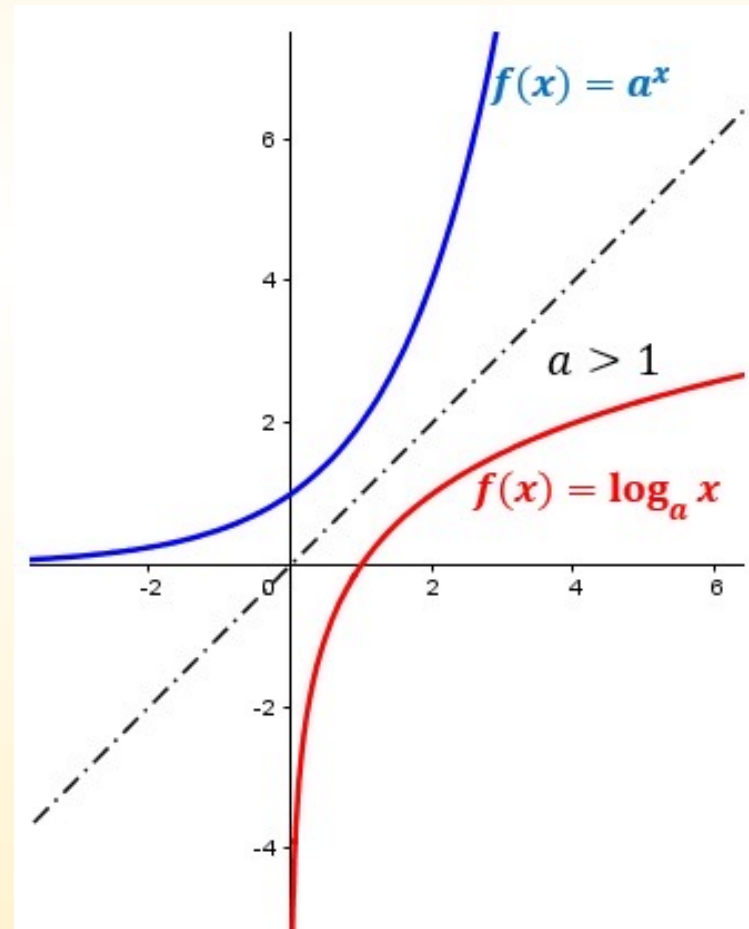
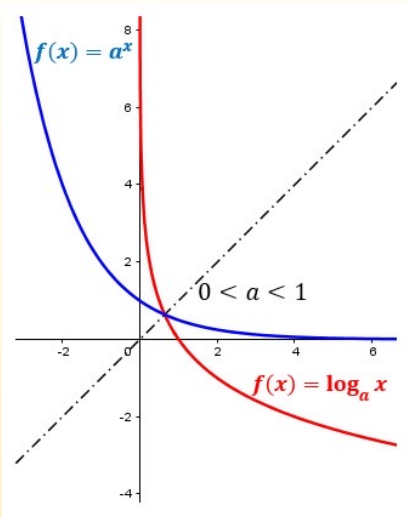


Función inversa

La **función exponencial** puede considerarse como la inversa de la **función logarítmica**.

$$y = a^x \leftrightarrow x = \log_a y$$

si $a < 1$:



Las funciones exponenciales se caracterizan únicamente por el hecho de que la tasa de crecimiento de dicha función (es decir, su derivada) es directamente proporcional al valor de la función.

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$$

El número e es conocido en ocasiones como número de Euler o constante de Napier:

$$e = 2.71828182845904523536\dots$$

Función Exponencial $\exp(x)$

Si $a=e$ tenemos:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

porque: $\log_e e = 1$

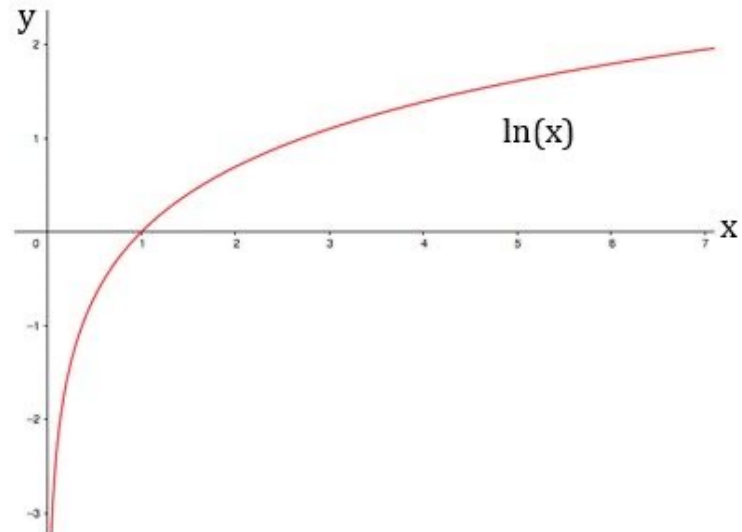
Esta función especial se llama **función exponencial**.

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

logaritmo natural $\ln(x)$

La función inversa de la función exponencial es el **logaritmo natural**.

$$y = e^x \leftrightarrow x = \log_e y = \ln y$$



Reglas matematicas:

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

$$\left(e^a\right)^b = e^{a \cdot b}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} = \left(\frac{1}{e}\right)^a$$

Reglas matematicas:

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log(a^b) = b \log a$$

Notación

$$\log_e x \equiv \ln x$$

$$\log_{10} x \equiv \lg x$$

$$e^x \equiv \exp(x)$$

Valores especiales

$$a^0 = e^0 = 1$$

$$\log_a(1) = \ln(1) = 0$$

$$\ln e = \log_a a = 1$$