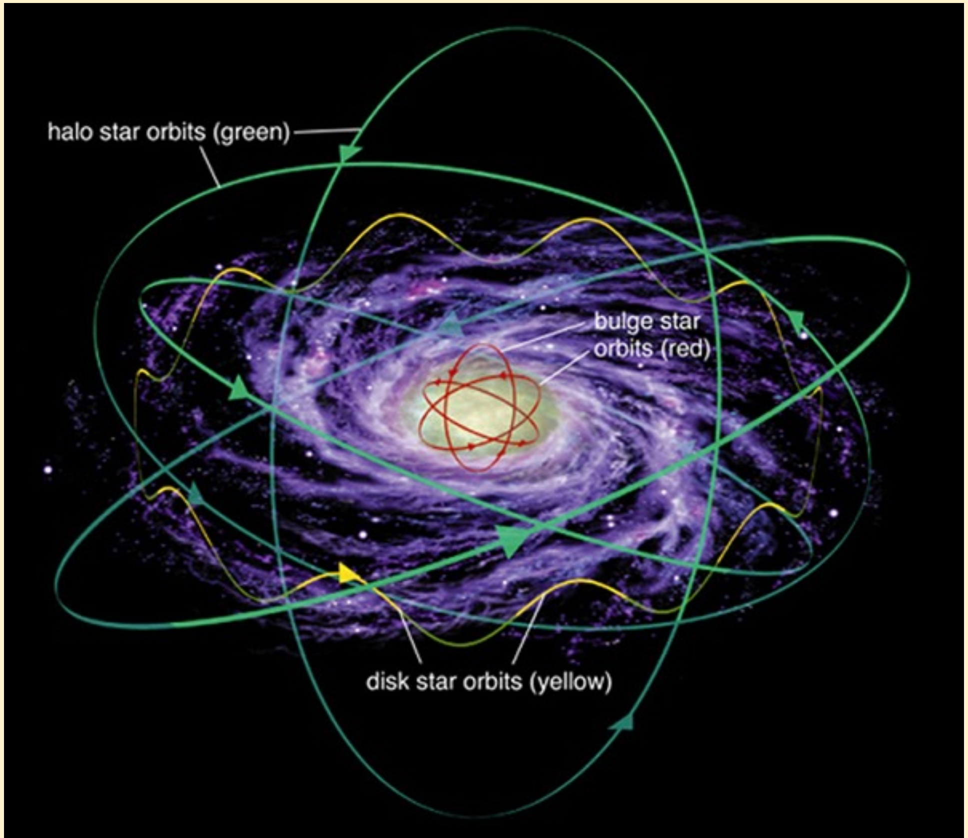
Escalas de tiempo (Timescales)

Tiempo de cruce (Crossing Time)



El tiempo de cruce es el tiempo que necesita una estrella para cruzar el objeto (cúmulo estelar o galaxia) en el que se encuentra.

$$\boxed{t_{\mathrm{cross}} = \frac{R_{\mathrm{system}}}{\mathrm{v}_{\mathrm{star}}}}$$

Para una esfera homogénea tenemos que:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$$

La velocidad circular en una esfera homogénea se puede calcular como:

$$\mathrm{v}_{\mathrm{circ}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$t_{\mathrm{cross}} = \frac{R}{\mathrm{v}} = \frac{R\sqrt{R}}{\sqrt{GM}} = \frac{R^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

$$\sqrt{M} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sqrt{\rho}R^{3/2}$$

$$t_{\mathrm{cross}} = \frac{R}{\mathrm{v}} = \frac{R\sqrt{R}}{\sqrt{GM}} = \frac{R^{3/2}}{\sqrt{GM}} = \frac{R^{3/2}}{R^{3/2}}\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}$$

tiempo de cruce para una esfera homogénea

$$\boxed{t_{\text{cross}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}}$$

Para cualquier otro sistema, podemos usar esta ecuación como regla general reemplazando la densidad constante con una densidad media.

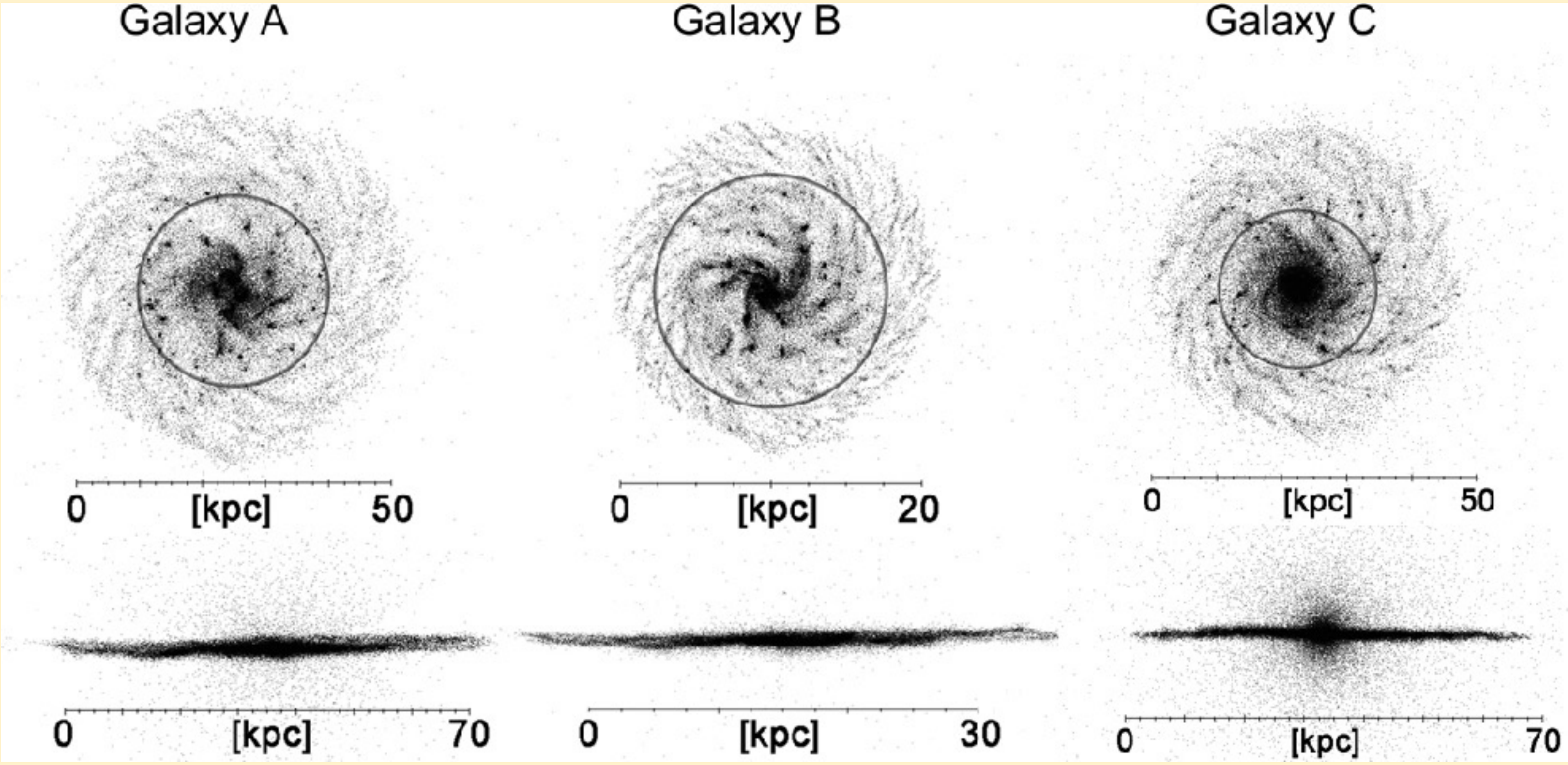
tiempo dinámico (dynamical time)

El tiempo dinámico de un sistema está en el orden del tiempo de cruce típico y, por lo tanto, a menudo se usan como sinónimos.

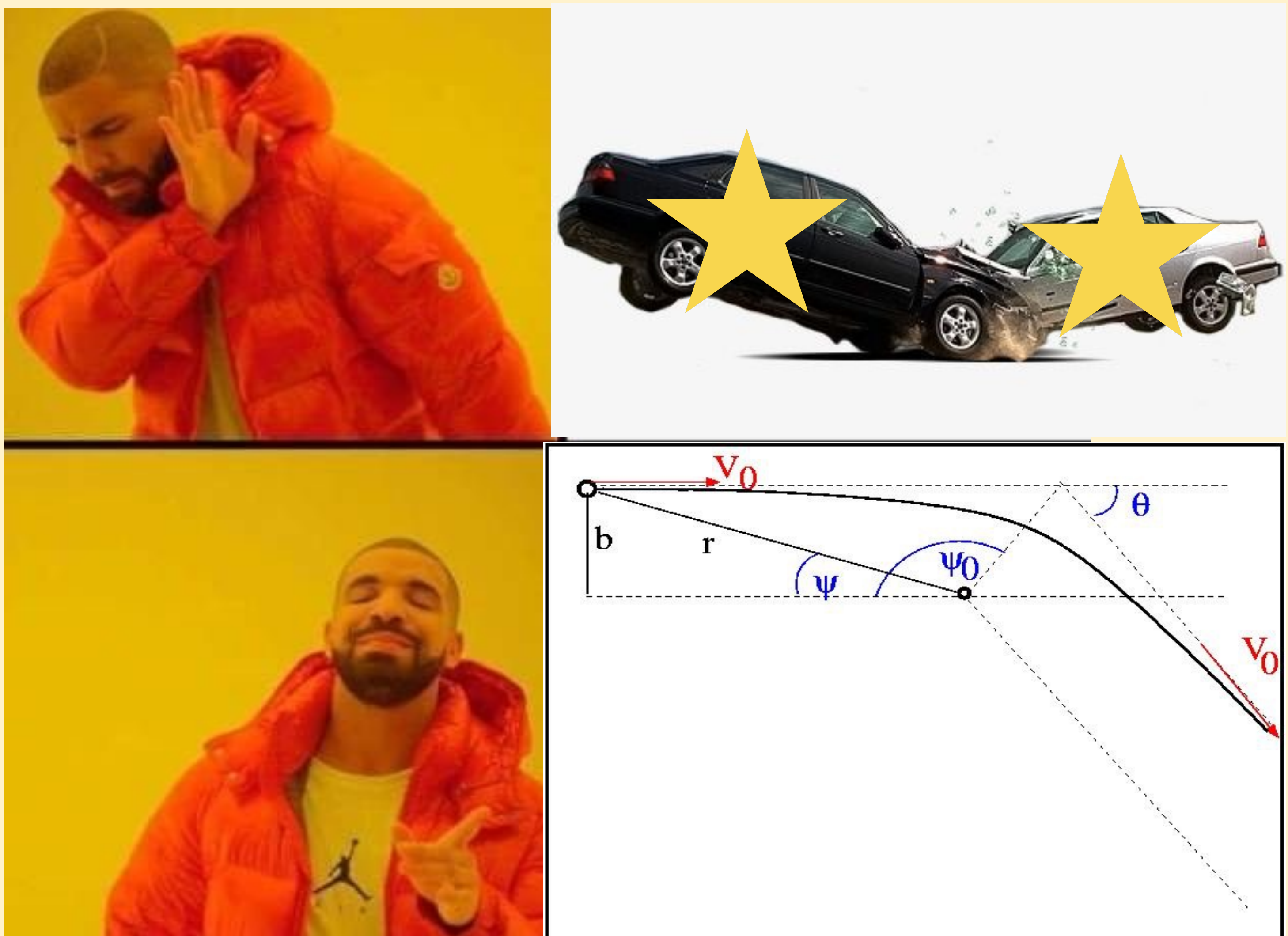
El tiempo dinámico se puede expresar mediante la densidad media del sistema.

$$\boxed{t_{\mathrm{dyn}} \simeq t_{\mathrm{cross}} \simeq \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}}$$

Tiempo de Relajación (Relaxation Time)



Colisiones entre Estrellas



Las colisiones reales entre estrellas casi nunca ocurren.

Si hablamos de colisiones solemos referirnos a encuentros cercanos entre estrellas que cambian drásticamente su órbita.

Cada encuentro entre dos estrellas puede cambiar sus órbitas ligeramente.

Entonces, incluso si una estrella no experimenta un encuentro cercano, muchos encuentros débiles pueden sumarse y, como resultado, la estrella está luego en una órbita completamente diferente.

Tiempo de Relajación
Relaxation Time

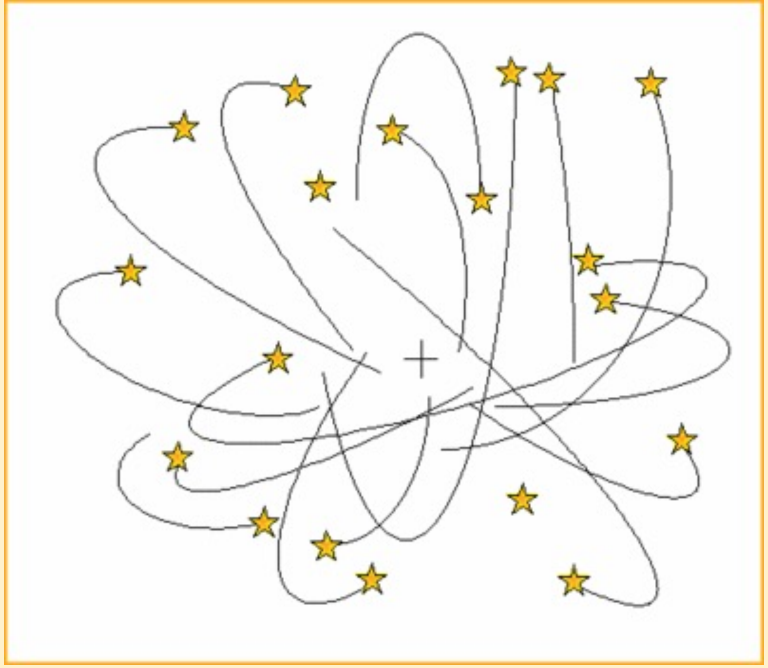
El tiempo de relajación es una medida estadística, el tiempo que tarda un sistema estelar (cúmulo abierto, cúmulo globular, galaxia, ...) en que todas las estrellas del sistema han cambiado su órbita por completo debido a la cantidad de encuentros.

En tal sistema, ya no podemos saber de dónde vino una estrella en particular, porque no podemos calcular su órbita actual al revés y esperar de encontrar el origen real.

La edad real en años no importa:

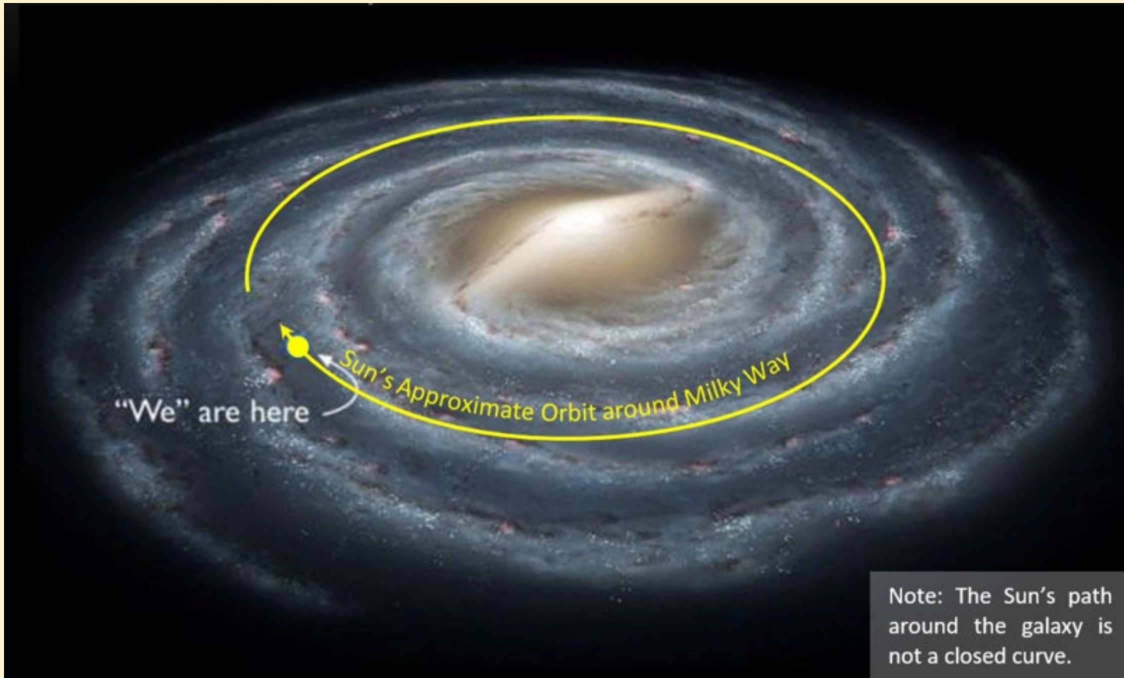
- Un sistema estelar, que es más antiguo que su tiempo de relajación, se denomina dinámicamente antiguo y está dominado por colisiones.

- Un sistema estelar, que es más joven que su tiempo de relajación, se denomina dinámicamente joven y sin colisiones.



Un pequeño cúmulo abierto puede ser dinámicamente antiguo, aunque su antigüedad sea de unos pocos Myr.

Una galaxia como la Vía Láctea es casi tan antigua como el Universo, pero la mayoría de las estrellas todavía se encuentran en sus órbitas iniciales; por lo tanto, es dinámicamente joven y sin colisiones.



Sistema sin Colisiones (Collisionless System)

La gravedad es una fuerza de largo alcance, que se reduce con la distancia como r^{-2}

Si la densidad en torno sería uniforme, el número de estrellas que actúan con su gravedad a una estrella se aumenta con la distancia, como r^2

==> cada elemento de la distancia tendrá el mismo efecto en la estrella, la aceleración de una estrella se rige por el sistema en su conjunto

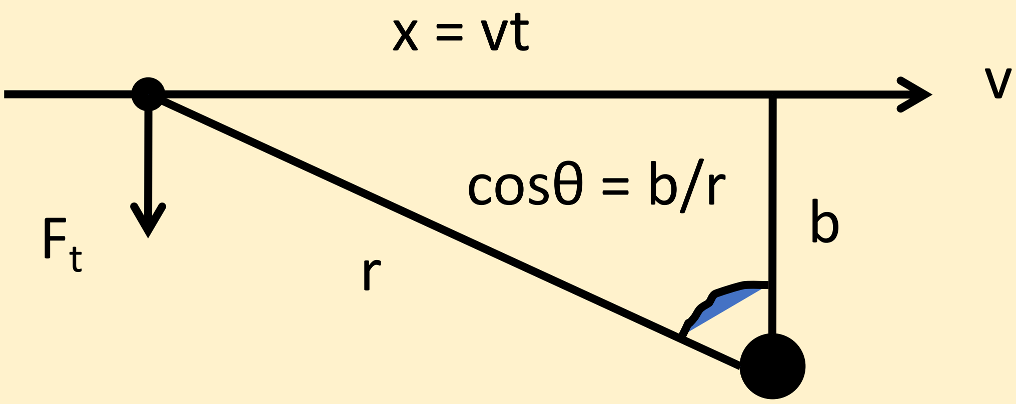
Ahora tratamos de establecer los sistemas para los que esta aproximación es válida…

Consideramos que una galaxia de N estrellas, que se distribuyen uniformemente

Buscamos el cambio en la velocidad de una estrella, si tenemos en cuenta todos sus encuentros con otras estrellas.

Si la velocidad de esta estrella cambia en 90 grados, decimos que ha olvidado su órbita inicial y está en una órbita completamente diferente.

El siguiente es sólo una estimación de orden de magnitud:

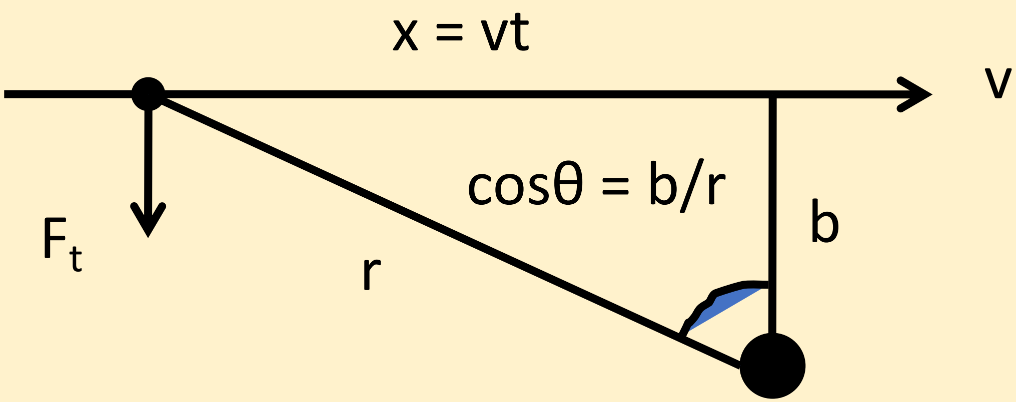


fuerza gravitacional total entre dos estrellas:

$$F = \frac{Gm^2}{r^2} = \frac{Gm^2}{x^2 + b^2}$$

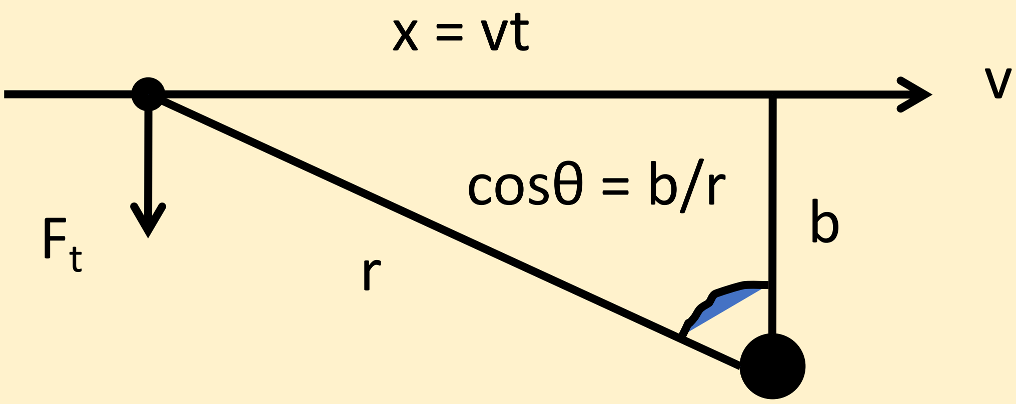
fuerza gravitacional en la dirección perpendicular:

$$F_t = \frac{Gm^2}{r^2}\cos\theta = \frac{Gm^2}{x^2 + b^2}\cos\theta$$



$$F_t = \frac{Gm^2}{r^2}\cos\theta = \frac{Gm^2}{x^2+b^2}\cos\theta$$

$$F_t = \frac{Gm^2 b}{\left(x^2+b^2\right)^{3/2}} = \frac{Gm^2 b}{b^3\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)^{3/2}} = \frac{Gm^2}{b^2}\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)^{-3/2}$$



$$F_t = \frac{Gm^2}{b^2}\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)^{-3/2} = \frac{Gm^2}{b^2}\left(1+\frac{(\mathrm{v}t)^2}{b^2}\right)^{-3/2} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt}$$

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{Gm}{b^2}\left[1+\left(\frac{\mathrm{v}t}{b}\right)^2\right]^{-3/2}$$

$$d\mathrm{v} = \frac{Gm}{b^2}\left[1+\left(\frac{\mathrm{v}t}{b}\right)^2\right]^{-3/2} dt$$

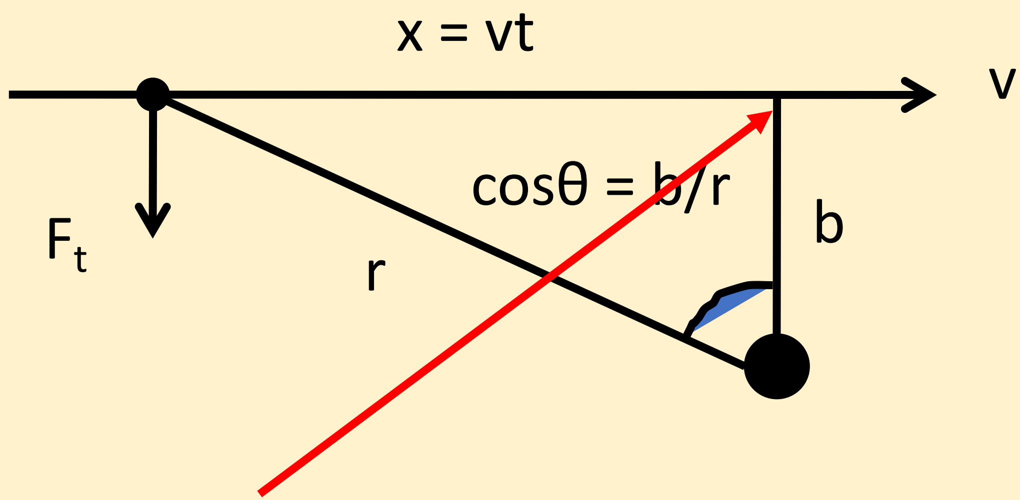
$$s = \frac{\mathrm{v}t}{b} \qquad \frac{ds}{dt} = \frac{\mathrm{v}}{b}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{b}{\mathrm{v}} ds$$

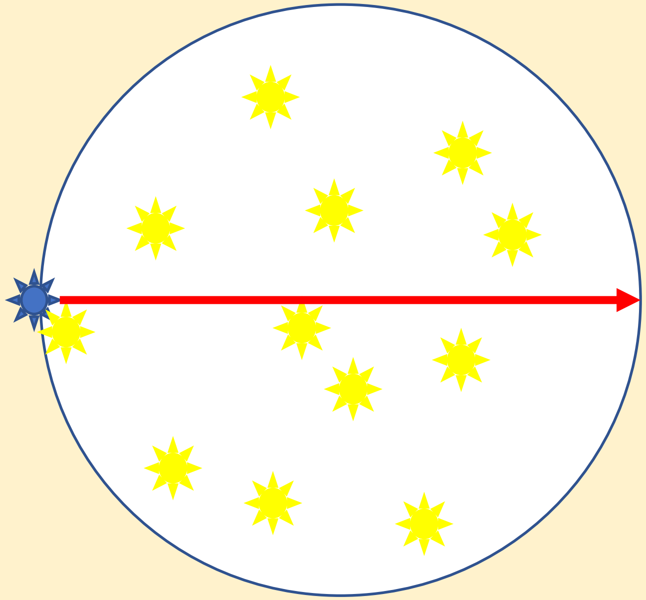
$$d\mathrm{v} = \frac{Gm}{b\mathrm{v}}\left(1+s^2\right)^{-3/2} ds \quad \Bigg| \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+s^2\right)^{-3/2} ds = \left[\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = 2$$

$$\boxed{\delta \mathrm{v} = \frac{2Gm}{b\mathrm{v}}}$$



Así, el cambio de velocidad es igual a la fuerza en el punto de máximo acercamiento: Gm/b^2
veces la duración de esa fuerza: t=b/v (*2).



Hemos calculado el cambio de velocidad debido a un encuentro con otra estrella. Durante un tiempo de cruce, la estrella viaja una vez a través de la galaxia y tiene muchos encuentros con otras estrellas. Podemos calcular eso proyectando la estructura 3D de la galaxia en una densidad de superficie e integrando todos los parámetros de impacto b posibles.

La densidad de superficie de nuestra galaxia es del orden de ~ $N/(\pi R^2)$ con R es el radio tipíco de la galaxia.

En una travesía de la galaxia, la estrella sufre

$$\delta n = \frac{N}{\pi R^2} 2\pi b db = \frac{2N}{R^2} b db$$

encuentros con otros estrellas con parametros de impacto en el rango de b a b+db.

Todos encuentros producen una pertubación de la velocidad de δv.

Esas perturbaciones están orientadas al azar y que suman un valor medio de cero, por lo tanto, calculamos el cuadrado de las perturbaciones δv^2.

$$\delta \mathrm{v}_t^2 \approx \left(\frac{2Gm}{b\mathrm{v}} \right)^2 \frac{2N}{R^2} b db = \frac{8GmN}{\mathrm{v}R^2} \frac{1}{b} db$$

Nuestra aproximación se rompe cuando δv~v con un parametro de impacto minimo:

$b_{min}=Gm/v^2$

Entonces, debemos integrar de b_{min} hasta R:

$$\Delta \mathrm{v}^2 = \int_{b_{\min}}^{R} \delta \mathrm{v}^2 = 8N \left(\frac{Gm}{R\mathrm{v}} \right)^2 \int_{b_{\min}}^{R} \frac{1}{b} db$$

$$\boxed{\Delta v^2 = 8N\left(\frac{Gm}{Rv}\right)^2 \ln\Lambda}$$

ln Λ se llama Coulomb logarithm (logaritmo de Coulomb)

$$\boxed{\Delta v^2 = 8N\left(\frac{Gm}{Rv}\right)^2 \ln\Lambda}$$

$$\Lambda = \frac{R}{b_{\min}} = \frac{Rv^2}{Gm} \qquad v^2 = \frac{GM}{R} = \frac{GmN}{R}$$

$$\Lambda = \frac{RGmN}{GmR} = N$$

$$\Delta v^2 = \frac{8NG^2m^2}{R^2v^2}\ln N = \frac{8NG^2m^2R}{R^2GNm}\ln N = \frac{8Gm}{R}\ln N$$

n_{relax} es el número de pasos hasta que $\Delta v^2 \sim v^2$:

$$n_{relax}\Delta v^2 = v^2 \qquad n_{relax} = \frac{v^2}{\Delta v^2}$$

$$n_{relax} = \frac{\mathrm{v}^2}{\Delta \mathrm{v}^2} = \frac{\mathrm{v}^2 R}{8Gm} \frac{1}{\ln N} = \frac{GNmR}{R8Gm} \frac{1}{\ln N} = \frac{N}{8 \ln N}$$

$$t_{\mathrm{relax}} = n_{\mathrm{relax}} \cdot t_{\mathrm{cross}} = \frac{N}{8 \ln N} t_{\mathrm{cross}}$$

tiempo de relajación
Relaxation Time

$$\boxed{t_{\mathrm{relax}} \approx \frac{0.1N}{\ln N} t_{\mathrm{cross}}}$$

Sistemas sin colisión (collisionless systems) son menores de un tiempo de relajación!

Ejemplos:

- Open clusters: $N = 10^3$, $t_{cross} = 10$ Myr

  $t_{relax} = 150$ Myr
- Globular Cluster: $N = 10^5$, $t_{cross} = 1$ Myr

  $t_{relax} = 1$ Gyr
- Galaxy: $N = 10^{10}$, $t_{cross} = 100$ Myr

  $t_{relax} = 10^6$ Gyr

Las galaxias son dinámicamente jóven porque sus tiempos de relajación son mucho mayores que su edad. Los encuentros entre estrellas no son importantes por su dinámica.

Todas las estrellas bien pueden estar en sus órbitas iniciales.

Llamamos a estos sistemas sin colisiones.

Los cúmulos de estrellas son dinámicamente viejos porque pueden ser más antiguos que su tiempo de relajación.

En los cúmulos estelares, los encuentros cercanos entre estrellas son importantes.

Con un poco mas matematica obtenemos:

$$\boxed{t_{relax} = \frac{6.5 \cdot 10^8\,\mathrm{yr}}{\ln(0.4N)} \left(\frac{M}{10^5\,\mathrm{M}_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{1\mathrm{M}_\odot}{\bar{m}} \right) \left(\frac{r_h}{1\mathrm{pc}} \right)^{3/2}}$$