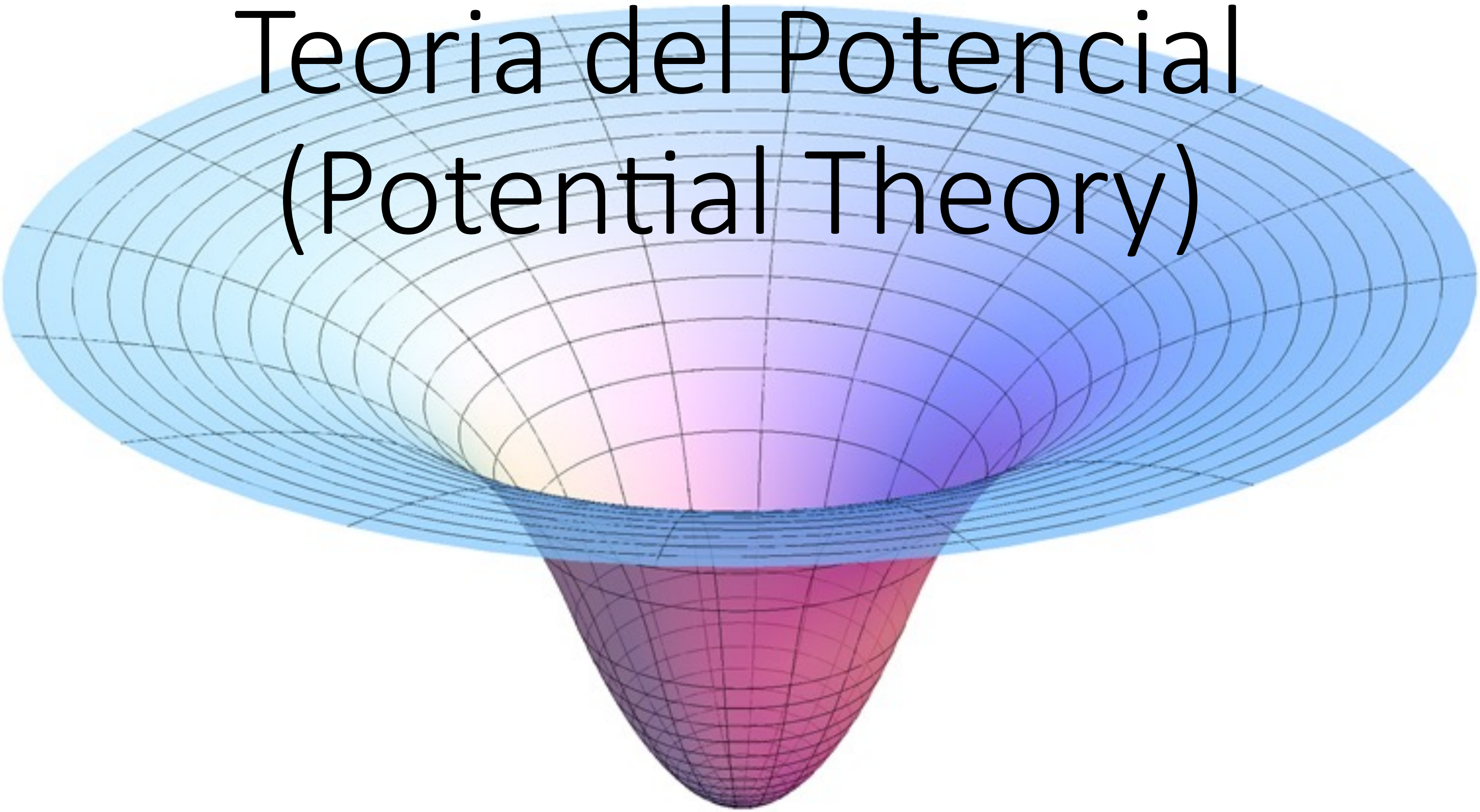
Teoria del Potencial
(Potential Theory)



Ley de Gravedad de Newton
Newton's Law of Gravity

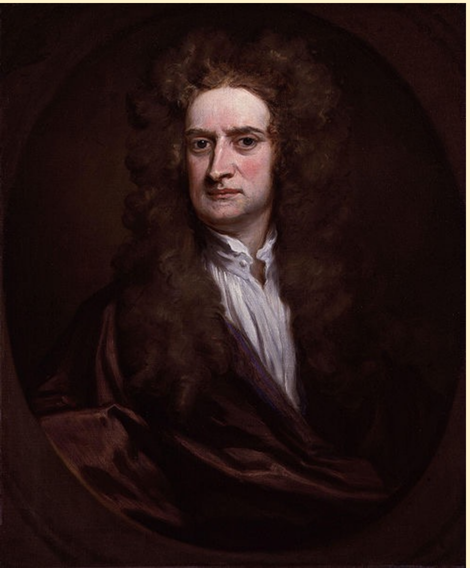
Entre dos cuerpos:

$$\boxed{\underline{F}(\underline{x}) = -G\frac{M_1 M_2}{\left|\underline{x}' - \underline{x}\right|^2}\frac{\underline{x}' - \underline{x}}{\left|\underline{x}' - \underline{x}\right|} = -GM_1 M_2 \frac{\underline{x}' - \underline{x}}{\left|\underline{x}' - \underline{x}\right|^3}}$$

negativo = fuerza atractiva

dirección

ley de distancia cuadrada inversa



Sir Isaac Newton (4 de enero de 1643 GR – 31 de marzo de 1727 GR) fue un físico, filósofo, inventor, alquimista y matemático inglés.

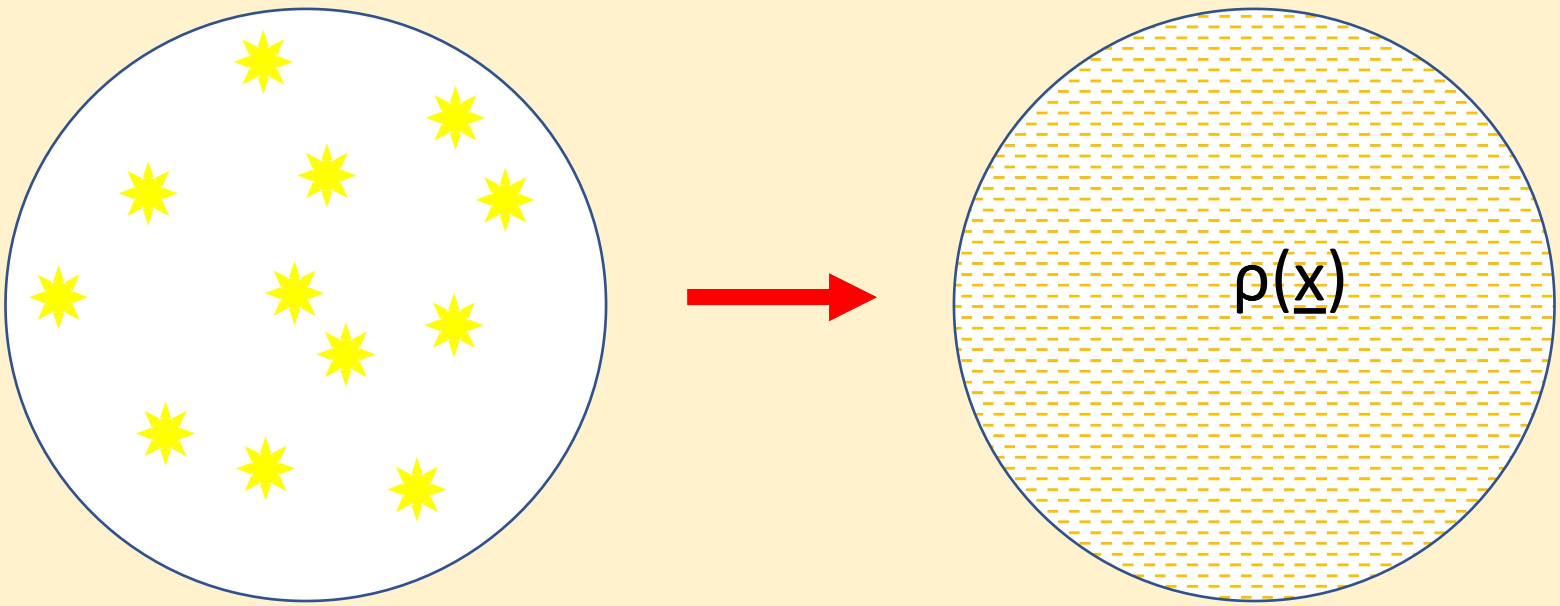
En un sistema estelar de N estrellas, tenemos que sumar todas las fuerzas N-1 de todas las demás estrellas para obtener la fuerza gravitacional completa que actúa sobre una sola estrella.

$$\boxed{\underline{F}_i(\underline{x}_i) = -GM_i \sum_{j=1, j\neq i}^{N} M_j \frac{\underline{x}_j - \underline{x}_i}{\left|\underline{x}_j - \underline{x}_i\right|^3}}$$

Mientras tanto, es factible hacer esto computacionalmente para los cúmulos estelares, es imposible hacerlo para las galaxias.

Como hemos visto en la lección anterior, los encuentros entre estrellas no juegan ningún papel en una galaxia.

Por lo tanto, ya no asumimos que la galaxia está formada por estrellas individuales (o masas puntuales), sino que es una sopa continua de densidades estelares.



Ahora queremos acceder a la fuerza generada por la atracción gravitatoria de una distribución de masa ρ(x) (también calculamos por unidad de masa, es decir que podemos dejar la masa de la partícula M_1):

$$\delta \underline{F}(\underline{x}) = G\frac{\underline{x}' - \underline{x}}{\left|\underline{x}' - \underline{x}\right|^3}\delta m(\underline{x}') = G\frac{\underline{x}' - \underline{x}}{\left|\underline{x}' - \underline{x}\right|^3}\rho(\underline{x}')\delta^3 x'$$

$$\boxed{\underline{F}(\underline{x}) = G\int\frac{\underline{x}' - \underline{x}}{\left|\underline{x}' - \underline{x}\right|^3}\rho(\underline{x}')d^3 x'}$$

Se define el potencial gravitatorio como:

$$\boxed{\Phi(\underline{x}) = -G\int \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}' - \underline{x}|}\, d^3x'}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{|\underline{x}'-\underline{x}|}\right)=\frac{\underline{x}'-\underline{x}}{|\underline{x}'-\underline{x}|^3}$$

$$=\begin{pmatrix} d/dx \\ d/dy \\ d/dz \end{pmatrix}\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right)^{-1/2}$$

primera linea: $(-1)2(x'-x)\left(-1/2\right)\left(\ldots\right)^{-3/2} \Rightarrow \frac{\underline{x}'-\underline{x}}{|\underline{x}'-\underline{x}|^3}$

Ahora podemos escribir:

$$\underline{F}(\underline{x}) = \nabla \int \frac{G\rho(\underline{x}')}{|\underline{x}' - \underline{x}|} d^3x'$$

$$\boxed{\underline{F}(\underline{x}) = -\nabla\Phi(\underline{x})}$$

La fuerza gravitatoria es el gradiente del potencial gravitacional.

Definición

$$\Phi(\underline{x}) = -\int_{\infty}^{\vec{x}} \underline{F}(\underline{x}'(\ell)) \cdot d\,\underline{\ell}$$

En mecánica newtoniana, el potencial gravitatorio o potencial gravitacional en un punto del campo gravitatorio es una magnitud escalar que se define como el trabajo por unidad de masa que debe realizar una fuerza para transportar un cuerpo, a velocidad constante, desde el infinito hasta un punto del campo gravitatorio.

Su unidad en el SI es el julio por kilogramo (J/kg).

Si el valor de Φ es independiente del camino, el potencial se llama conservador.

El potencial gravitatorio es conservador.

Ahora estamos tomando la divergencia de la ecuación:

$$\nabla \cdot \underline{F}(\underline{x}) = G \int \nabla \cdot \frac{\underline{x}' - \underline{x}}{\left|\underline{x}' - \underline{x}\right|^3} \rho(\underline{x}') d^3 x'$$

$$\nabla \cdot \frac{\underline{x}' - \underline{x}}{\left|\underline{x}' - \underline{x}\right|^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x' - x}{\left((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\right)^{3/2}}\right] + \frac{d}{dy}[\ldots] + \frac{d}{dz}[\ldots]$$

$$(-1)(..)^{-3/2} - (x'-x)2(x'-x)(-3/2)(..)^{-5/2}$$

tomando la divergencia de la ecuación:

$$\nabla \cdot \underline{F}(\underline{x}) = G\int \nabla \cdot \frac{\underline{x}' - \underline{x}}{|\underline{x}' - \underline{x}|^3}\rho(\underline{x}')d^3x'$$

$$\nabla \cdot \frac{\underline{x}' - \underline{x}}{|\underline{x}' - \underline{x}|^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x' - x}{\left((x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2\right)^{3/2}}\right] + \frac{d}{dy}[\ldots] + \frac{d}{dz}[\ldots]$$

$$(-1)(..)^{-3/2} - (x'-x)2(x'-x)(-3/2)(..)^{-5/2}$$

$$= -\frac{3}{|\underline{x}' - \underline{x}|^3} + \frac{3(\underline{x}' - \underline{x})(\underline{x}' - \underline{x})}{|\underline{x}' - \underline{x}|^5} = -\frac{3}{|\underline{x}' - \underline{x}|^3} + \frac{3|\underline{x}' - \underline{x}|^2}{|\underline{x}' - \underline{x}|^5}$$

$si\ \underline{x}' \neq \underline{x}$ podemos cancelar $|\underline{x}' - \underline{x}|^2$

$$\boxed{\nabla \cdot \frac{\underline{x}' - \underline{x}}{|\underline{x}' - \underline{x}|^3} = 0 \text{ por } \underline{x} \neq \underline{x}'}$$

Por lo tanto, podemos restringir el volumen de la integración a una pequeña esfera de radio h alrededor x=x’ y asumir ρ(x') es constante dentro de la esfera:

$$\nabla \cdot \underline{F}(\underline{x}) = G\rho(\underline{x}) \int_{|\vec{x}' - \vec{x}| \leq h} \nabla \cdot \frac{\underline{x}' - \underline{x}}{\left|\underline{x}' - \underline{x}\right|^3} d^3x'$$

$$= -G\rho(\underline{x}) \int_{|\vec{x}' - \vec{x}| \leq h} \nabla_{x'} \cdot \frac{\underline{x}' - \underline{x}}{\left|\underline{x}' - \underline{x}\right|^3} d^3x'$$

Teorema de la divergencia
Divergence theorem

$$\boxed{\int_V \nabla \cdot \underline{F}(\underline{x})\, d^3x = \int_{S(V)} \underline{F}(\underline{x}) \cdot d^2S}$$

$$\nabla \cdot \underline{F}(\underline{x}) = -G\rho(\underline{x}) \int_{|\underline{x}'-\underline{x}|=h} \frac{\underline{x}' - \underline{x}}{|\underline{x}' - \underline{x}|^3} \cdot d^2 S'$$

$$d^2 S = h^2 d^2 \underline{\Omega} = (\underline{x}' - \underline{x}) |\underline{x}' - \underline{x}| d^2 \underline{\Omega}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{F}(\underline{x}) &= -G\rho(\underline{x}) \int \frac{|\underline{x}' - \underline{x}|^2 |\underline{x}' - \underline{x}|}{|\underline{x}' - \underline{x}|^3} d^2 \underline{\Omega} \\ &= -G\rho(\underline{x}) \int d^2 \underline{\Omega} \\ &= -4\pi G\rho(\underline{x}) \end{aligned}$$

reemplazamos $\underline{\mathrm{F}}(\underline{\mathrm{x}}) = -\nabla\Phi(\underline{x})$ y $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ (Laplace operador)

La ecuación de Poisson
Poisson's Equation

Siméon-Denis Poisson
(21 June 1781 – 25 April 1840)

$$\boxed{\nabla^2 \Phi(\underline{x}) = 4\pi G \rho(\underline{x})}$$

(en 1812)

En matemática y física, la ecuación de Poisson es una ecuación en derivadas parciales con una amplia utilidad en electrostática, ingeniería mecánica y física teórica. Su nombre se lo debe al matemático, geómetra y físico francés Siméon-Denis Poisson.

Para la astronomía, esta ecuación relaciona cualquier distribución de densidad con su propio potencial y por lo tanto la fuerza de gravedad que causa.

La ecuación de Laplace
Laplace Equation

$$\boxed{\text{at} \quad \rho = 0: \qquad \Delta\Phi(\underline{x}) = 0}$$

Pierre-Simon Laplace (23 de marzo de 1749 – 5 de marzo de 1827) astrónomo, físico y matemático francés que inventó y desarrolló la transformada de Laplace y la ecuación de Laplace.

Si integramos la ecuación de Poisson sobre un volumen que contiene la masa total M se obtiene:

$$\text{RHS:} \quad 4\pi G \int \rho d^3x = 4\pi GM$$

$$\text{LHS:} \quad \int \nabla^2 \Phi d^3x = \int_{S(V)} \nabla \Phi d^2 S$$

utilizando la teorema de divergencia

Teorema de Gauss
Gauss Theorem

El integral de la componente normal de $\Delta\Phi$ sobre cualquier superficie cerrada es igual a $4\pi G$ veces la masa M que está en el interior del volumen encerrado por esta superficie.

Johann Carl Friedrich Gauss (Gauß (30 de abril de 1777, Brunswick – 23 de febrero de 1855, Göttingen), fue un matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica.

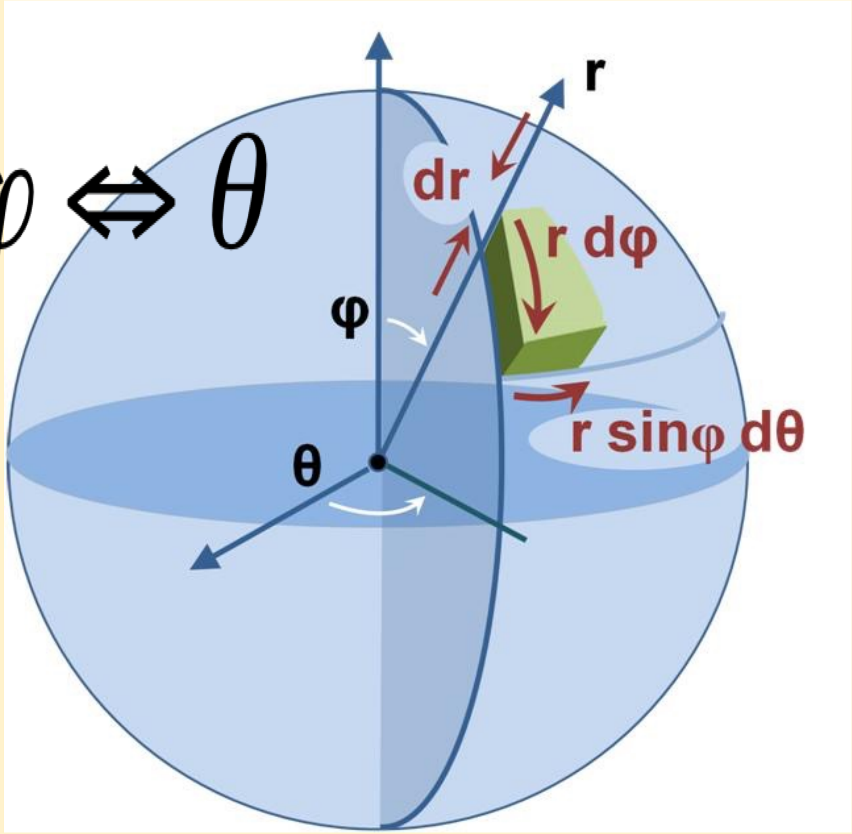
Potenciales de sistemas esféricos simples

$$\rho(\underline{x}) \rightarrow \rho(r)$$

Transformación en coordenadas esféricas

- x = r sinθ cosφ
- y = r sinθ sinφ
- z = r cosθ
- r = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\theta = arcos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$
- $\varphi = atan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\varphi \Leftrightarrow \theta$$



Elemento de Volumen: $\boxed{d^3x = dr\, rd\theta\, rsin\theta d\varphi}$

Ecuación de Poisson en coordenadas esféricas

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=4\pi G\rho}$$

la Ecuación de Poisson en coordenadas esféricas para los sistemas esféricos:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=4\,\pi G\rho}$$

También podemos usar la igualdad:

$$\boxed{\nabla^2\Phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = 2r\frac{d\Phi}{dr} + r^2\frac{d^2\Phi}{dr^2}\Bigg|\cdot\frac{1}{r^2}$$

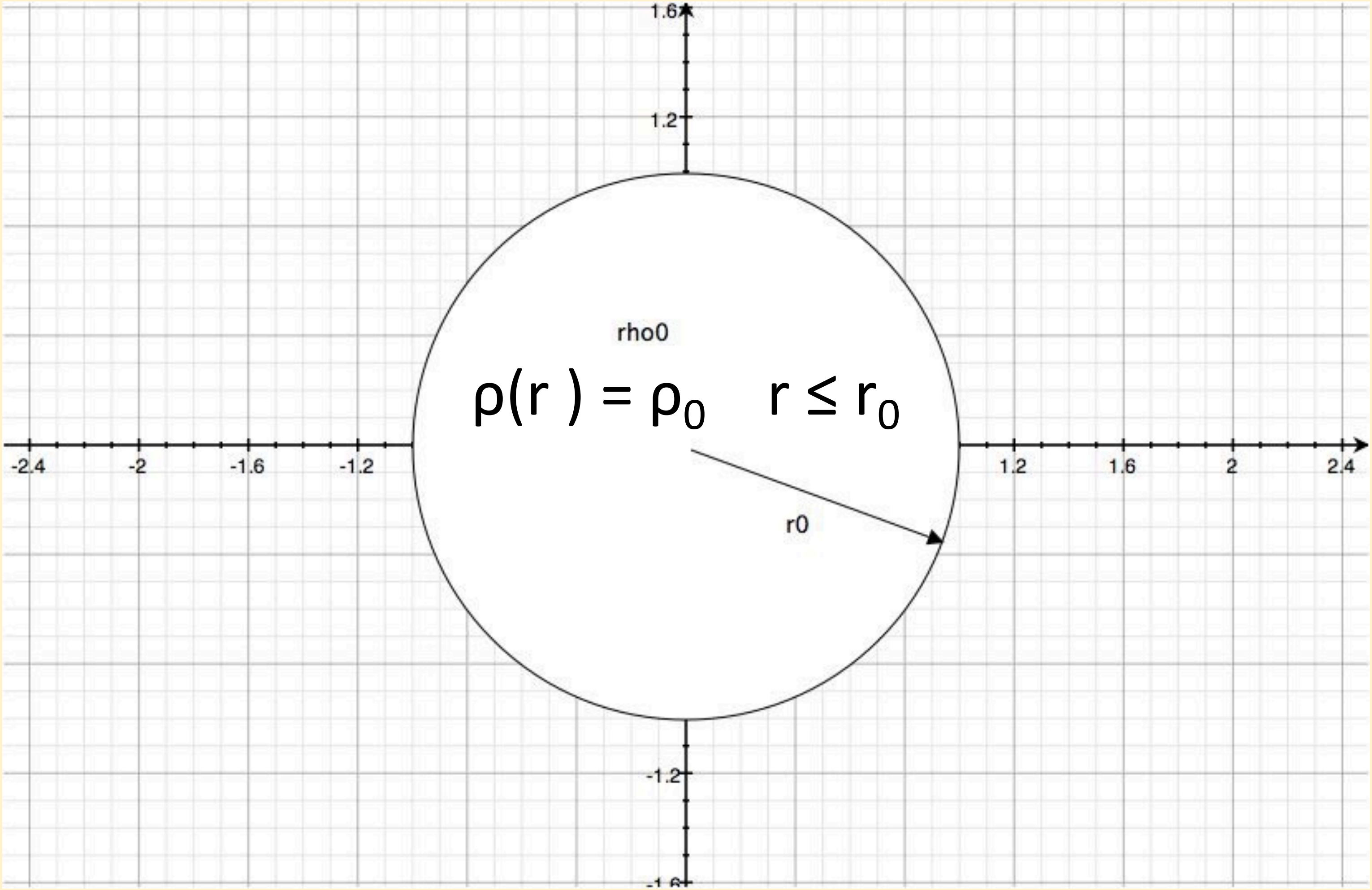
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} + \frac{d^2\Phi}{dr^2}$$

$$\frac{d}{dr}(r\Phi) = \Phi + r\frac{d\Phi}{dr}\Bigg|\frac{d}{dr}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi) = \frac{d\Phi}{dr} + \frac{d\Phi}{dr} + r\frac{d^2\Phi}{dr^2}\Bigg|\cdot\frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi) = \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} + \frac{d^2\Phi}{dr^2}$$

Esfera homogénea
Homogeneous sphere



resolviendo la ecuación de Poisson dentro de la esfera r ≤ r_0:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r\Phi\right) = 4\pi G\rho_0$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(r\Phi\right) = 4\pi G\rho_0 r$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\Phi\right) = 2\pi G\rho_0 r^2 + A$$

$$r\Phi = \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^3 + Ar + B$$

resolviendo la ecuación de Poisson dentro de la esfera r ≤ r_0:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi) = 4\pi G\rho_0$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi) = 4\pi G\rho_0 r$$

$$\frac{d}{dr}(r\Phi) = 2\pi G\rho_0 r^2 + A$$

$$r\Phi = \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^3 + Ar + B$$

$$\Phi(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho_0 r^2 + A + \frac{B}{r}$$

Requerimos que $\Phi(0) < \infty$ ==> B = 0

resolviendo la ecuación de Laplace fuera de la esfera $r > r_0$:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r\Phi\right) = 0 \qquad \frac{d^2}{dr^2}\left(r\Phi\right) = 0 \qquad \frac{d}{dr}\left(r\Phi\right) = C \qquad r\Phi = Cr + D$$

$$\Phi(r) = C + \frac{D}{r}$$

Requiremos que $\Phi \to 0$ por $r \to \infty$ ==> $C = 0$

Requiremos que Φ y dΦ/dr estan continuas en r = r_0:

$$\frac{2}{3}\pi G\rho_0 r_0^2 + A = \frac{D}{r_0}$$

$$\frac{4}{3}\pi G\rho_0 r_0 = -\frac{D}{r_0^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$D = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0 r_0^3$$

$$A = -2\pi\rho_0 r_0^2$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \Phi(r) = \frac{2\pi}{3}G\rho_0\left(r^2 - 3r_0^2\right) & \text{por} & r \le r_0 \\ \Phi(r) = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0 r_0^3 \frac{1}{r} & \text{por} & r > r_0 \end{array}}$$

La masa total de una esfera homogénea esta:

$$M = \frac{4\pi}{3} G \rho_0 r_0^3$$

$$\boxed{\Phi(r) = -\frac{GM}{r}} \qquad \text{por} \quad r > r_0$$

Es el potencial de una masa puntual (point mass).

Segundo teorema de Newton
Newton’s second theorem

The gravitational force on a body outside a closed spherical shell of matter is the same as if the whole matter would be concentrated in the centre of the shell.

La fuerza gravitacional de un cuerpo fuera de una capa cerrada esférica de materia es la misma que si toda la materia se concentra en el centro de la capa.

Esfera homogénea
Homogeneous sphere: (ρ=const.)

$$\boxed{M(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3}$$

$$\boxed{\mathrm{v}_c(r) = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{3}r}}$$

Período orbital:

$$\boxed{T(r) = \frac{2\pi r}{\mathrm{v}_c} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_0}} = const}$$

La ecuación de movimiento:

$$\boxed{\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3}r}$$

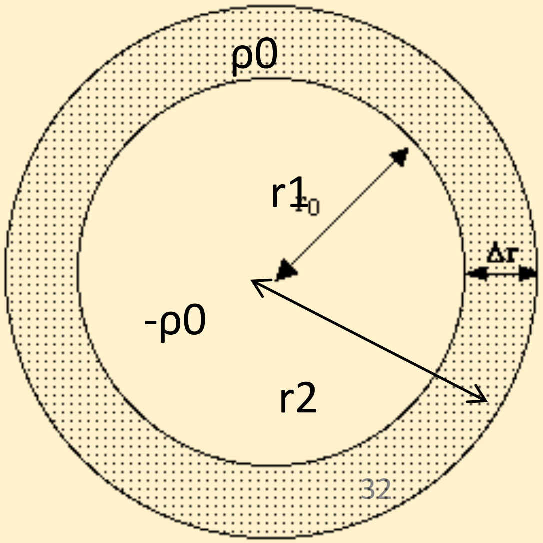
como un oscilador armónico

Corteza esférica
Spherical shell: $\rho(r) = \rho_0 \quad r_1 \leq r \leq r_2$

La ecuación de Poisson es lineal en la densidad y el potencial por lo que cualquier superposición de dos sistemas obedece a la ecuación de Poisson también:

Por lo tanto, resolvemos el problema fácilmente añadiendo

1. Una esfera de radio r_2 y la densidad ρ_0
2. Una esfera de radio r_1 y la densidad $-\rho_0$



De inmediato podemos escribir la respuesta:

por $r < r_1$:

$$\Phi(r) = \frac{2\pi}{3} G\rho_0 \left(r^2 - 3r_2^2\right) - \frac{2\pi}{3} G\rho_0 \left(r^2 - 3r_1^2\right)$$

$$\Phi(r) = 2\pi G\rho_0 \left(r_1^2 - r_2^2\right) = const.$$

por $r_1 < r < r_2$:

$$\Phi(r) = \frac{2\pi}{3} G\rho_0 \left(r^2 - 3r_2^2\right) + \frac{4\pi}{3} G\rho_0 r_1^3 \frac{1}{r}$$

por $r > r_2$:

$$\Phi(r) = \frac{4\pi}{3} G\rho_0 r_1^3 \frac{1}{r} - \frac{4\pi}{3} G\rho_0 r_2^3 \frac{1}{r}$$

$$\Phi(r) = -\frac{4\pi}{3} G\rho_0 \left(r_2^2 - r_1^2\right) \frac{1}{r}$$

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

Toman en cuenta que en el interior de la corteza r <r_1 la a dependencia de r anula y el potencial es constante ==> ninguna fuerza neta actúa sobre las partículas,

esto es…

Primero teorema de Newton
Newton's First Theorem

A body that is inside a spherical shell of matter experiences no net gravitational force from that shell.

Un cuerpo que está dentro de una capa esférica de materia no experimenta fuerza gravitatoria neta de este corteza.

Solución para cualquier distribución esférica de masa ρ(r)

Si ahora añadimos (integrar) las contribuciones de un número arbitrario de cortezas se puede calcular el potencial de cualquier distribución de densidad esférica.

Tenemos que tener en cuenta el potencial generado por toda la masa dentro del radio r y sumar todas las contribuciones (que son constante) de las capas de masa fuera de r.

Contribución desde el interior de r

hemos visto:

$$\Phi = -\frac{GM(r)}{r}$$

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

$$\boxed{\Phi_{in}(r) = -4\pi G \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'}$$

Contribución desde el exterior de r

potencial dentro de una corteza:

$$\delta\Phi = 2\pi G\rho\left(r\right)\left(r_1^2 - r_2^2\right)$$

$$\left(r_1^2 - r_2^2\right) = \left(r_1 + r_2\right)\left(r_1 - r_2\right)$$

si la corteza se vuelve muy delgada:

$$r_1 \to r \quad r_2 \to r$$

$$r_1 + r_2 \to 2r \quad r_1 - r_2 \to dr$$

$$\delta\Phi_{out} = -4\pi G\rho\left(r\right)rdr \Rightarrow \boxed{\Phi_{out}\left(r\right) = -4\pi G\int_r^\infty r'\rho\left(r'\right)dr'}$$

$$\Phi(r) = -\frac{4\pi G}{r}\int_0^r r'^2 \rho(r')\,dr' - 4\pi G\int_r^\infty r'\rho(r')\,dr'$$

dentro de r fuera de r por Φ(∞)=0

$$\boxed{\Phi(r) = -4\pi G\left[\frac{1}{r}\int_0^r r'^2 \rho(r')\,dr' + \int_r^\infty r'\rho(r')\,dr'\right]}$$

Algunas relaciones útiles para los sistemas esféricos

$$\Phi(r) = -\frac{GM(r)}{r} + const.$$

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 \, dr'$$

Velocidad circular
Circular velocity

La velocidad de un objeto debe tener una órbita circular estable dentro o alrededor de una distribución de masas para resistir el tirón gravitatorio de esta distribución en masa.

$$\boxed{\mathrm{v}_c^2(r) = r\frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM(r)}{r}}$$

Velocidad de escape
Escape velocity

La velocidad que necesita un objeto para escapar de la atracción gravitacional de una distribución de la masa hasta el infinito.

$$\boxed{\mathrm{v}_e^2(r) = 2\left|\Phi(r)\right|}$$

Masa puntual
Point mass

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$$

$$\mathrm{v}_c(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\mathrm{v}_e(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$