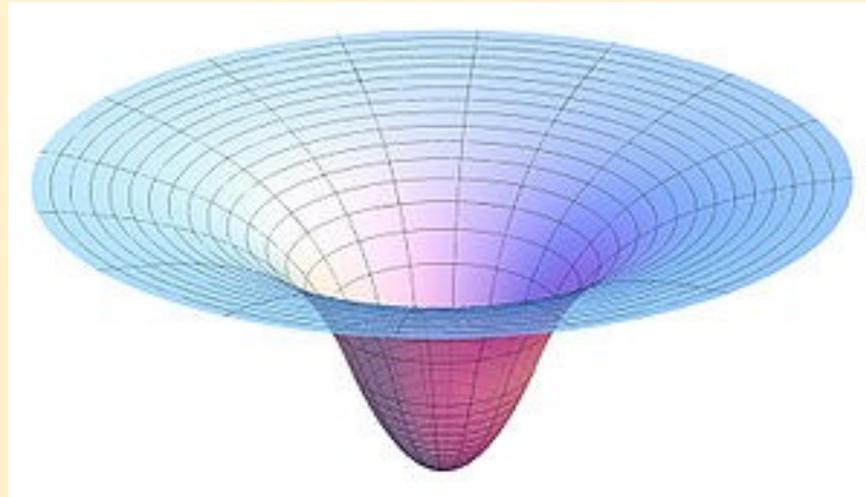
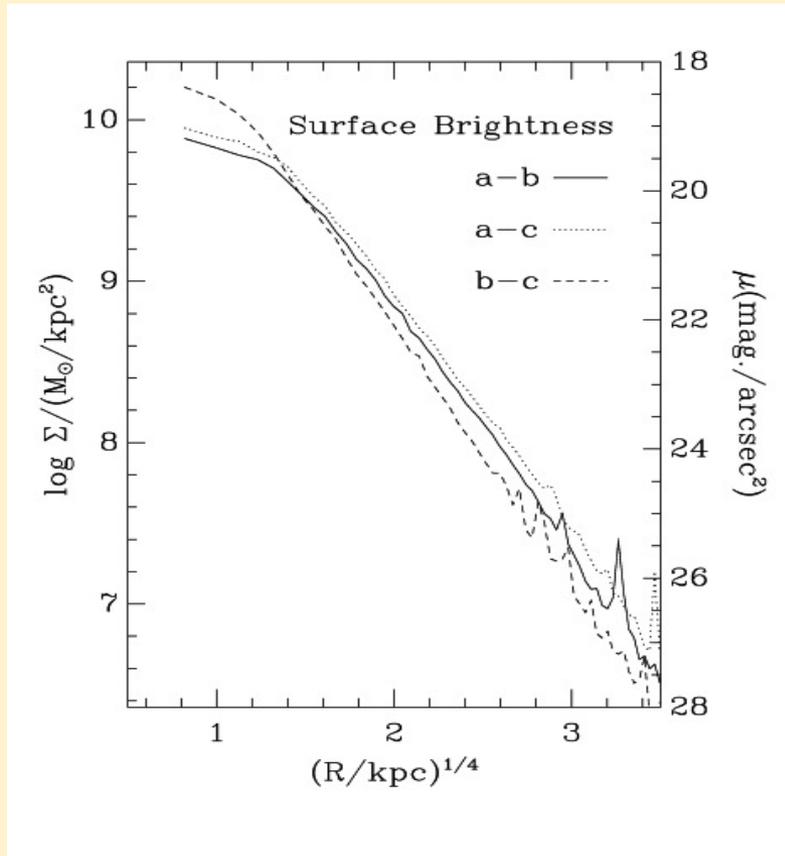


# Potenciales de sistemas esféricos



# Hubble perfil

Edwin Powell Hubble (Marshfield, Misuri, 20 de noviembre de 1889 - San Marino, California, 28 de septiembre de 1953) fue uno de los más importantes astrónomos de EEUU del siglo XX.



2D función de ajuste de brillo superficial de las galaxias elípticas

$$\Sigma(R) = \frac{\Sigma_0}{\left(1 + \frac{R}{a}\right)^2}$$

# Modified Hubble Profile

## Hubble perfil modificado

Suponga una densidad de luminosidad esférica:

$$j(r) = j_0 \left( 1 + \frac{r^2}{a^2} \right)^{-3/2} \quad (38)$$

Un observador podría ver la proyección de esta como una distribución de brillo superficial:

$$I(R) = 2 \int_0^{\infty} j(z) dz \quad (39)$$

Ahora  $r^2 = R^2 + z^2$  :

$$I(R) = 2j_0 \int_0^{\infty} \left( 1 + \frac{R^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-3/2} dz \quad (40)$$

dejar  $y = \frac{z}{\sqrt{a^2 + R^2}}$

$$1 + \left( \frac{R}{a} \right)^2 + \left( \frac{z}{a} \right)^2 = \frac{1}{a^2} (a^2 + R^2 + z^2) = \frac{a^2 + R^2}{a^2} \left( 1 + \frac{z^2}{a^2 + R^2} \right) = \frac{a^2 + R^2}{a^2} (1 + y^2)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + R^2}} \quad \rightarrow \quad dz = \sqrt{a^2 + R^2} dy$$

$$\Rightarrow I(R) = 2j_0 \left( \frac{a^2 + R^2}{a^2} \right)^{-3/2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{a^2 + R^2}}{(1 + y^2)^{3/2}} dy$$

$$= 2j_0 \frac{a^3}{a^2 + R^2} \int_0^{\infty} (1 + y^2)^{-3/2} dy \quad (41)$$

La integral puede ser evaluada mediante la sustitución de  $y=\tan(x)$ , por lo que  $dy=\sec^2(x)dx$  para

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2(x)dx}{(\sec^2 x)^{3/2}} = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$$

$$\Rightarrow I(R) = 2j_0 a \frac{1}{1 + \frac{R^2}{a^2}} = \Sigma_0 \frac{1}{1 + \frac{R^2}{a^2}} \quad (42)$$

Hubble perfil

Si suponemos una relación constante masa-luz por toda la galaxia, podemos reemplazar  $j$  con la densidad y preguntar cuál es el potencial sería:

$$\rho(r) = \rho_0 \left( 1 + \frac{r^2}{a^2} \right)^{-3/2} \quad (43)$$

Use la ecuación de Poisson:

$$\frac{1}{4\pi G} \frac{d^2}{dr^2}(r\Phi) = \frac{\rho_0 r}{\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{3/2}} \quad | \int dr$$

$$\frac{1}{4\pi G} \frac{d}{dr}(r\Phi) = \frac{\rho_0 a^2}{2} \int \frac{2r}{a^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{3/2}} dr$$

dejar:  $u = 1 + \frac{r^2}{a^2} \quad \rightarrow \quad du = \frac{2r}{a^2} dr$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi G} \frac{d}{dr}(r\Phi) &= \frac{\rho_0 a^2}{2} \int u^{-3/2} du \\ &= -2 \frac{\rho_0 a^2}{2} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2} + A \quad | \int dr \end{aligned}$$

$$\frac{r\Phi}{4\pi G} = Ar - \rho_0 a^3 \int (a^2 + r^2)^{-1/2} dr$$

$$\int (a^2 + x^2)^{-1/2} dx = \ln(2\sqrt{a^2 + x^2} + 2x) = \sinh^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\frac{r\Phi}{4\pi G} = Ar + B + \rho_0 a^3 \ln(2\sqrt{a^2 + r^2} + 2r)$$

$$\Phi(r) = 4\pi GA + \frac{4\pi GB}{r} - 4\pi G\rho_0 a^3 \frac{\ln(2\sqrt{a^2 + r^2} + 2r)}{r} \quad (44)$$

B=0 en caso contrario el potencial cae como 1/r para r > 0

A = 0 para asegurarse que  $\Phi(\infty)=0$

$$\Phi(r) = -4\pi G\rho_0 a^3 \frac{\ln(2\sqrt{a^2 + r^2} + 2r)}{r} \quad (45)$$

$$M(r) = 4\pi\rho_0 \int_0^r \frac{r'^2}{\left(1 + \frac{r'^2}{a^2}\right)^{3/2}} dr' \sim \ln r \quad \text{por } r \text{ larga} \quad (46)$$

por lo que se diverge por  $r \rightarrow \infty$

# Power Law Density Profile

ley de potencia-perfil de densidad

$$\rho(r) = \rho_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^\alpha \quad (47)$$

$$\Sigma(R) = \frac{\rho_0 r_0^\alpha \left( -\frac{1}{2} \right)! \left( \frac{\alpha - 3}{2} \right)!}{R^{\alpha-1} \left( \frac{\alpha - 2}{2} \right)!} \quad (48)$$

$$M(r) = \frac{4\pi\rho_0 r_0^\alpha}{3 - \alpha} r^{3-\alpha} \quad \text{for } \alpha < 3 \quad (49)$$

$$v_c^2(r) = \frac{4\pi\rho_0 r_0^\alpha}{3 - \alpha} r^{2-\alpha} \quad (50)$$

$\alpha = 2$  : singular isothermal  
sphere ( $v_c = \text{const.}$ )  
Esfera singular isotérmica

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\Phi) = 4\pi G\rho_0 a^\alpha r^{1-\alpha} \quad | \int dr$$

$$\frac{d}{dr}(r\Phi) = 4\pi G\rho_0 a^\alpha \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} + A \quad | \int dr$$

$$r\Phi = 4\pi G\rho_0 a^\alpha \frac{r^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + Ar + B$$

otra vez:  $A = B = 0$ :

$$\Phi(r) = 4\pi G\rho_0 \frac{a^\alpha}{(2-\alpha)(3-\alpha)} r^{2-\alpha} \quad (51)$$

$\Phi(\infty) \rightarrow 0$  if  $\alpha > 2 \Rightarrow 2 < \alpha < 3$

$\alpha=2$  : isothermal sphere (esfera isotérmica)

$\alpha=3$  : modified Hubble profile (Hubble perfil modificado)



Niels Henrik Abel (Findö, Noruega, 5 de agosto de 1802 - Froland, Noruega, 16 de abril de 1829) fue un matemático noruego.

Projected density --->  
spherical density

Proyección de la densidad ---> densidad esférica

$$I(R) = 2 \int_R^{\infty} \frac{j(r)rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}} \quad (52)$$

inversion: 
$$j(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^{\infty} \frac{I(R)RdR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (53)$$

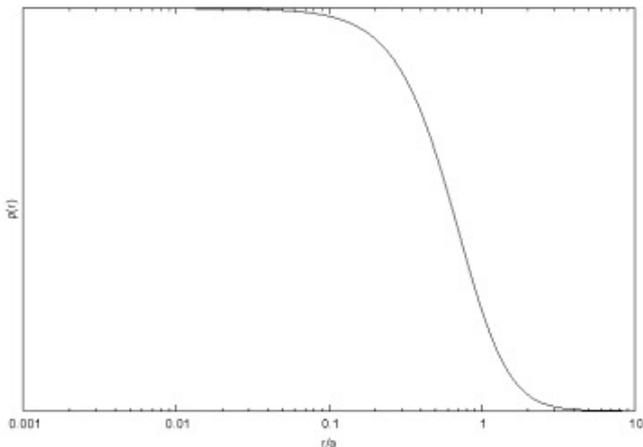
**Abel's integral equation**  
ecuación integral de Abel

# Plummer sphere: esfera de Plummer (1911)

Miembro de la familia de polytropes

$$\Phi_P(r) = -\frac{GM_{pl}}{\sqrt{r^2 + R_{pl}^2}} \quad (54)$$

$$\rho(r) = \left( \frac{3M_{pl}}{4\pi R_{pl}^3} \right) \left( 1 + \frac{r^2}{R_{pl}^2} \right)^{-\frac{5}{2}} \quad (55)$$



Henry Crozier Keating Plummer (24 October 1875 – 30 September 1946) fue un astrónomo inglés. (no foto)

Plummer-Kuzmin model:

$$\Phi_K(R, z) = - \frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}} \quad (56)$$

Miyamoto-Nagai model:

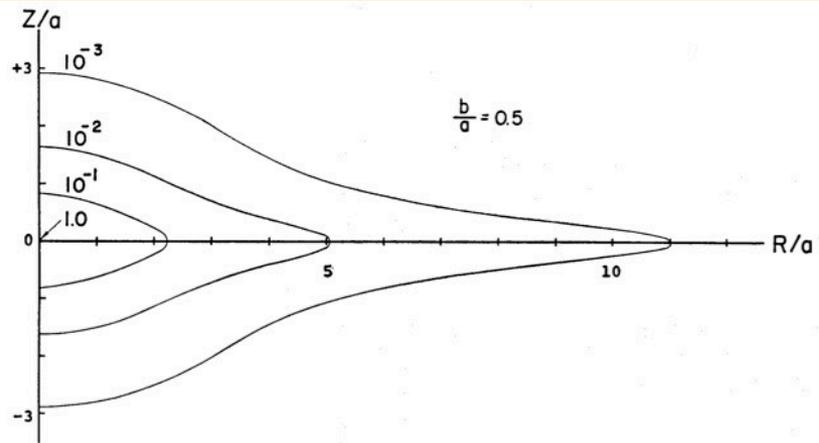
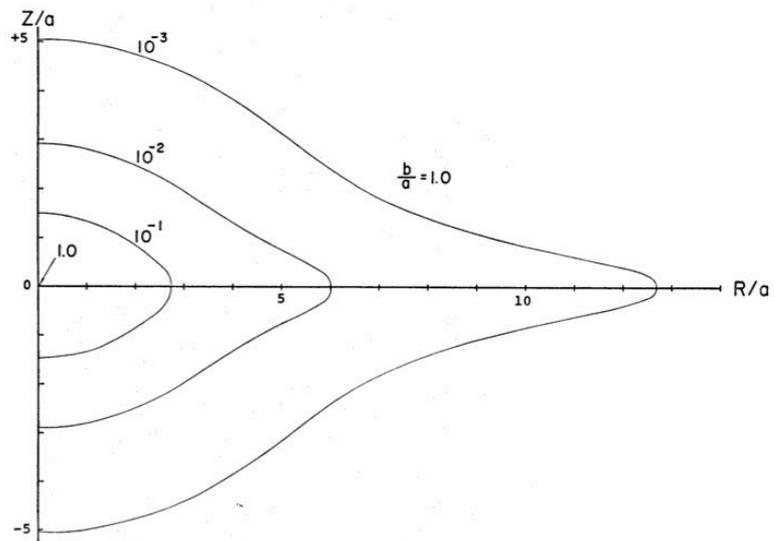
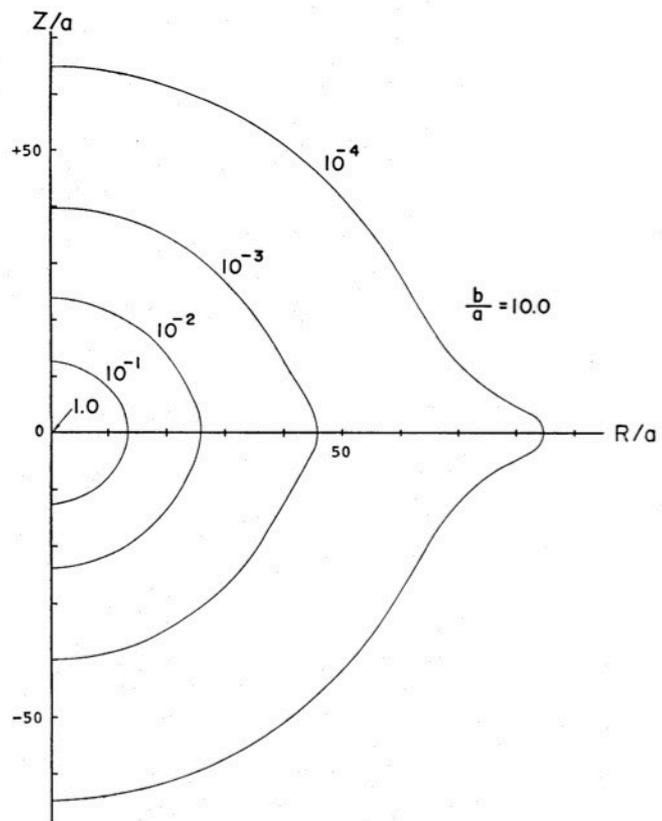
$$\Phi_M(R, z) = - \frac{GM}{\sqrt{R^2 + \left(a + \sqrt{z^2 + b^2}\right)^2}} \quad (57)$$

$$\rho(R, z) = \left( \frac{b^2 M}{4\pi} \right) \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{\left[ R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2 \right]^{\frac{5}{2}} (z^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (58)$$

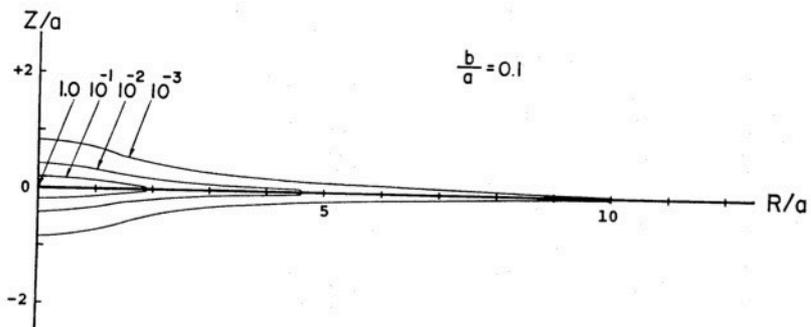
b/a=0.2: similar a una galaxia de disco

a=0: Plummer

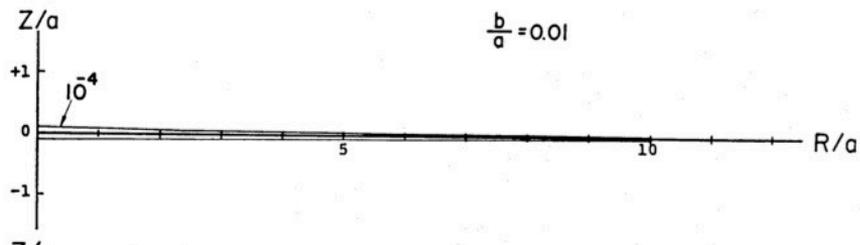
b=0: Kuzmin



(c)



(d)



- Si diferenciamos  $\Phi_K/a$  con respecto a  $a^2$  se obtiene un nuevo par de potencial y densidad.
- Si tomamos la derivada n-ésima se le conoce como **modelo de Toomre n**
- el límite  $n \rightarrow \infty$  tiende a la distribución de Gauss

$$\Sigma_K^\infty = \Sigma_0 \exp\left(-\frac{R^2}{2R_T^2}\right) ; \quad a^2 = 2nR_T^2 \quad (59)$$



Alar Toomre, profesor emeritus, MIT

# Otros potenciales esfericos

# Logarithmic Potential

## Potencial Logarítmico

$$\Phi(R, z) = \frac{1}{2} v_0^2 \ln \left( R_c^2 + R^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right) + \text{const.} \quad (60)$$

$$\rho(R, z) = \left( \frac{v_0^2}{4\pi G q_\Phi^2} \right) \frac{(2q_\Phi^2 + 1)R_c^2 + R^2 + 2 \left( 1 - \frac{1}{2} q_\Phi^{-2} \right) z^2}{\left( R_c^2 + R^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} \right)^2} \quad (61)$$

$$v_c(z=0) = \frac{v_0 R}{\sqrt{R_c^2 + R^2}} \quad (62)$$

$v_c$  aumenta con radio

$$q_\rho^2 = \frac{1 + 4q_\Phi^2}{2 + \frac{3}{q_\Phi^2}} \quad (63)$$

El potencial es sólo alrededor de un tercio aplanado como la distribución de densidad se convierte en negativo en el eje  $z$ , cuando  $q_\rho < 1/\sqrt{2}$ .

$$q_\rho^2 = q_\Phi^2 \left( 2 - \frac{1}{q_\Phi^2} \right) \quad (64)$$

# Hernquist model

modelo de Hernquist

$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi} \frac{a}{r} \frac{1}{(r+a)^3} \quad (65)$$

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r+a} + \text{const.} \quad (66)$$



Lars Hernquist, profesor en Harvard