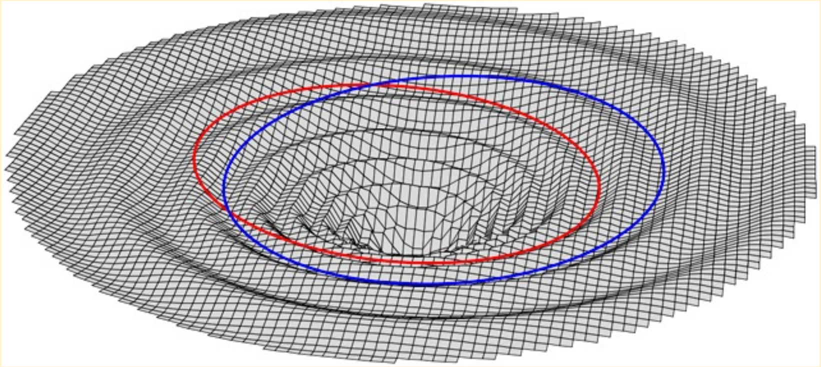
Distribuciones de densidad de simetría axial

==>



Si ρ (r, θ) es independiente de ϕ, entonces Φ (r, θ) sólo depende de r y θ.

Así que la ecuación de Laplace (12) se convierte en coordenadas esféricas:

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)=0}$$

(69)

Suponemos ahora Φ(r, θ) es separable = R(r)× T(θ)   (70)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)=0\Big|\cdot r^2$$

$$\text{insert }\Phi\text{=RT}$$

$$T\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{R}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=0 \qquad (71)$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=-\frac{1}{T\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)$$

Cada término tiene que ser constante y b=-a para garantizar que la ecuación (71) es = 0 siempre.

podemos resolver ambas ecuaciones por separado

primero miramos la coordenada r:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=\alpha\left(\alpha+1\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)-\alpha\left(\alpha+1\right)R=0 \tag{72}$$

esta ecuación diferencial tiene la solución general

$$R\left(r\right)=Ar^{\alpha}+\frac{B}{r^{\alpha+1}} \tag{75}$$

A=0

Legendre equation

Adrien-Marie Legendre (París, 18 de septiembre de 1752 - Auteuil, Francia, 10 de enero de 1833) fue un matemático francés. Hizo importantes contribuciones a la estadística, la teoría de números, el álgebra abstracta y el análisis matemático.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)=-\alpha(\alpha+1)T \qquad (73)$$

$$\text{usa } \mu=\cos\theta \quad \Rightarrow \quad d\mu=-\sin\theta d\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\left(1-\mu^2\right)\frac{\partial T}{\partial\mu}\right)+\alpha(\alpha+1)T=0 \qquad (74)$$

- Si T es finito en $\theta=0, \pi$ ($\mu = +/-1$) -> esto sólo puede suceder si α es un numero entero no negativo = 0, 1, 2, ...
- Entonces la ecuación (74) es la ecuación de definición de polinomios de Legendre.
- Tenemos la solución:

$$T(\theta) = C_\alpha P_\alpha(\cos\theta) \tag{76}$$

Legendre Polynomials:

los primeros 3 polinomios de Legendre:

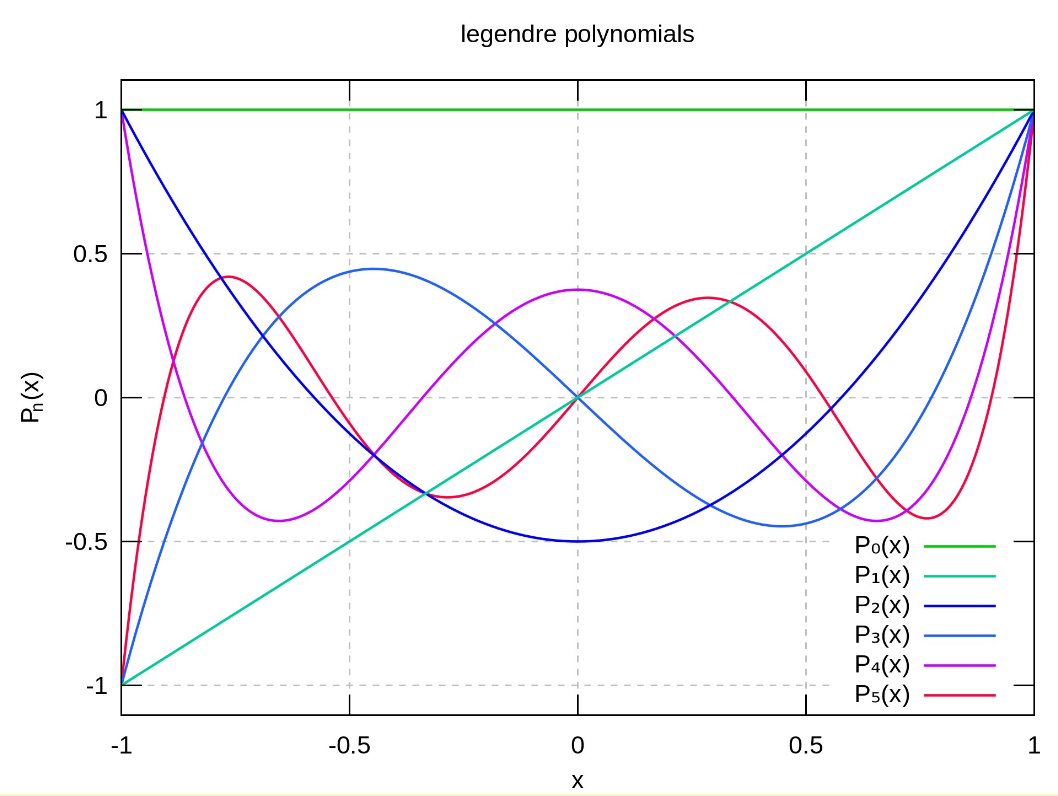
$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

para todos los polinomios:

$$P_n(1) = 1$$



Los polinomios de Legendre pueden construirse usando la relación de recurrencia:

$$\left(n+1\right)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_{n}(x)-nP_{n-1}(x)$$

Los polinomios de Legendre definen un set de funciones ortogonales:

$$\int_{-1}^{1}P_{n}(x)P_{m}(x)\,dx=0 \qquad \text{por } n\neq m$$

$$=\frac{2}{2n+1} \qquad \text{por } n=m$$

$$P_{n}(x)=\frac{1}{2^{n}n!}\frac{d^{n}}{dx^{n}}(x^{2}-1)^{n} \qquad (77)$$

Si el cuerpo es simétrica con respecto de θ = π/2, entonces sólo necesitamos n de par y la solución complete es:

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \Rightarrow \Phi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n} P_{2n}(\cos\theta)}{r^{2n+1}} \qquad (78)$$

$$\Phi(r,\theta) = -\frac{GM}{r} + \frac{B_2}{r^3}(3\cos^2\theta - 1) + \frac{B_4}{r^5}\left(\frac{35}{8}\cos^4\theta - \frac{15}{4}\cos^2\theta + \frac{3}{8}\right) + \ldots$$

Ahora solo necesitamos determinar las constantes B2, B4, ... con la distribución de densidad que tenemos.

Standard potential representation of the Milky Way
Representación analytico del potencial de la Vía Láctea

- Logarithmic Halo:
  - V_0=186 km/s
  - R_g =12 kpc

$$\Phi_h = \frac{1}{2} v_0^2 ln\left(R^2 + \frac{z^2}{q_\Phi^2} + R_g^2\right)$$

- Miamoto-Nagai Disc:
  - $M_d=10^{11}M_{sun}$
  - b=6.5 kpc, c=0.26 kpc

$$\Phi_d = -\frac{GM_d}{\sqrt{R^2 + \left(b + \sqrt{z^2 + c^2}\right)^2}}$$

- Hernquist Bulge:
  - $M_b=3.4\text{x}10^{10}$ M_{sun}
  - a=0.7 kpc

$$\Phi_b = -\frac{GM_b}{r + a}$$

Potential of a thin disc
Potencial de un disco delgado

- Altura ≪ Radio
- Utilice coordenadas cilíndricas ρ(R,z) y Φ(R,z) y la simetría ρ(r,z) = ρ(R,-z)
- Por lo tanto fuera del disco:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}=0 \qquad (81)$$

Usamos nuevamente que las variables deben separarse en dos funciones J(R) y Z(z).

$$\Phi(R,z) = J(R)\cdot Z(z)$$

Nuevamente, podemos traer un término al otro lado y ver que ambos lados solo pueden ser iguales si son iguales a una constante.

$$\frac{1}{JR}\frac{d}{dR}\left(R\frac{dJ}{dR}\right) = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2$$

En la coordenada z tenemos la siguiente ecuación diferencial bien conocida:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$$

Esta ecuación diferencial tiene la siguiente solución general:

$$Z(z) = A\exp(kz) + B\exp(-kz)$$

Nuevamente podemos suponer que A = 0 y z = -z:

$$Z(z) = B\exp(-k|z|) \qquad (82)$$

Bessel function

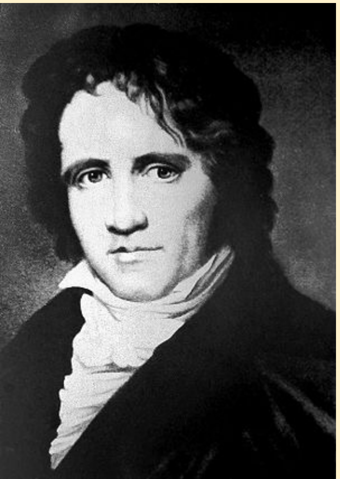
$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{dJ}{dR}\right)+k^2J=0 \qquad (83)$$

- Es la ecuación de definición para una función de Bessel
- Y tiene soluciones $J_0(kR)$ y $Y_0(kR)$

- En matemática, las funciones de Bessel, primero definidas por el matemático Daniel Bernoulli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas y(x) de la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \alpha^2\right) y = 0$$

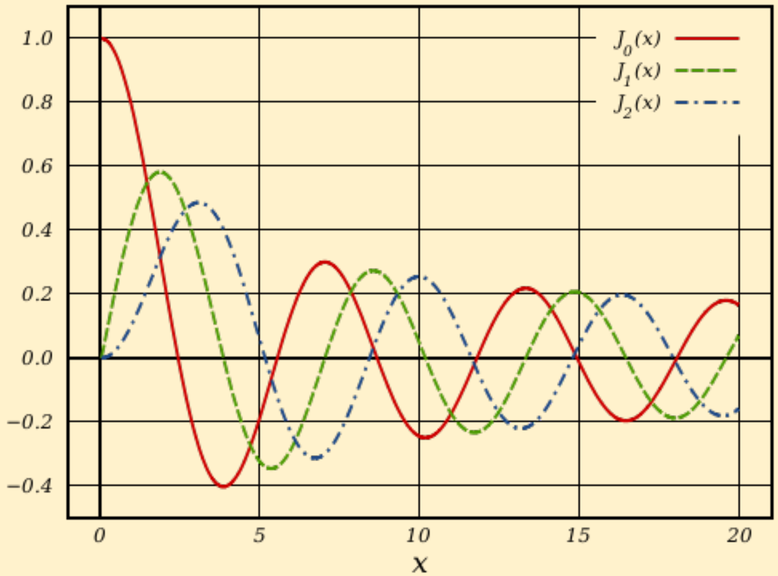
Daniel Bernoulli (* 8 de febrero de 1700 - 17 de marzo de 1782) fue un matemático, estadístico, físico y médico holandés-suizo. Destacó no sólo en matemática pura, sino también en las aplicadas. Hizo importantes contribuciones en hidrodinámica y elasticidad.



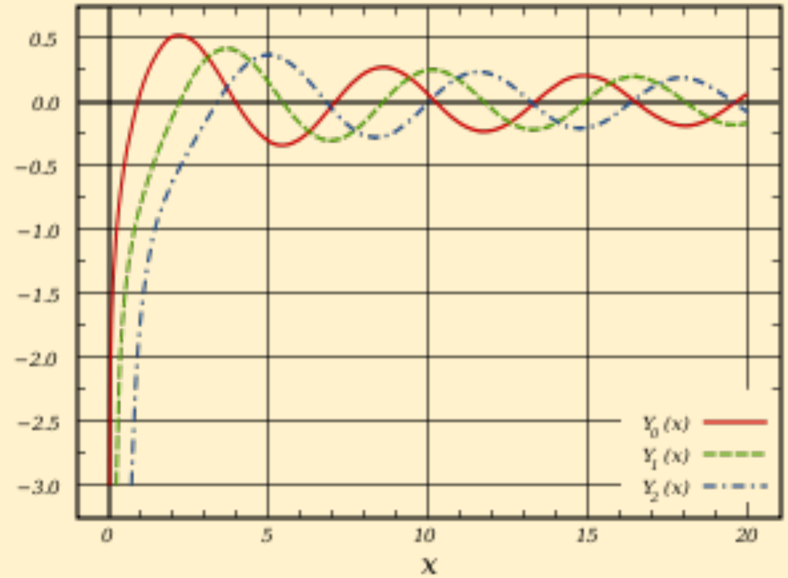
Friedrich Wilhelm Bessel (22 de julio, 1784 - 17 de marzo, 1846) fue un matemático alemán, astrónomo, y sistematizador de las funciones de Bessel. Nació en Minden, Westfalia y murió en Königsberg (Kaliningrado, Rusia). Bessel fue un contemporáneo de Carl Gauss, que también era matemático y astrónomo.

Algunos más acerca de las funciones de Bessel:

Ecuación diferencial	solución
$\frac{d^2y}{ds^2}+k^2y=0$	sin(ks), cos(ks)
$\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dy}{ds}\right)+k^2y=0$	$J_0(ks)$, $Y_0(ks)$
$\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dy}{ds}\right)+(k^2+\frac{\nu^2}{s^2})y=0$	$J_\nu(ks)$, $Y_\nu(ks)$
$\frac{d^2y}{ds^2}-k^2y=0$	sin(iks), cos(iks), exp(iks)
$\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dy}{ds}\right)-k^2y=0$	$I_0(ks)$, $K_0(ks)$
$\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dy}{ds}\right)-(k^2+\frac{\nu^2}{s^2})y=0$	$I_\nu(ks)$, $K_\nu(ks)$



Funciones de Bessel de primera especie, $J_\alpha(x)$, para órdenes enteros α=0,1,2.



Funciones de Bessel de segunda especie, $Y_\alpha(x)$, para órdenes α=0,1,2.

La solución completa para el potencial es el producto de las dos funciones:

$$\Phi_k\left(R,z\right)=C_k\exp(-k|z|)J_0(kR) \qquad (84)$$

Para obtener un potencial finito en r = 0, podemos elegir cualquier número real positivo k> 0, por lo que la solución total general no es una suma sino una integral sobre todos los valores posibles de k.

$$\Phi(R,z)=\int_0^{\infty} f(k)\exp\left(-k|z|\right)J_0(kR)\,dk \qquad (85)$$

Aquí f(k) es una función de peso que corresponde a los coeficientes C_k de la suma, tenemos que encontrar f(k) para una distribución de la masa específica.

Comenzamos integrando la ecuación de Poisson y usamos el teorema de Gauss. Para el volumen pensamos en un cilindro con altura z -> 0 y área A:

LHS:

$$\int 4\pi G\rho\, dV = 4\pi G\Sigma A$$

RHS:

$$\int \nabla\Phi d^2S = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}_{z=0+} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}_{z=0-} \right) A$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{0-}^{0+} = 4\pi G\Sigma(R) \qquad (86)$$

LHS es también:

$$-\int kf\left(k\right)\exp(-k0+)J(kR)\,dk - \int kf\left(k\right)\exp(-k0-)J(kR)\,dk$$

$$= -2\int kf(k)J_0(kR)\,dk$$

Ahora tenemos una expresión que conecta la densidad de superficie en el plano Σ con la función de peso f(k).

$$\Sigma(R) = -\frac{1}{2\pi G}\int_0^\infty k f(k) J_0(kR)\, dk \qquad (87)$$

Ahora podemos usar la transformación de Hankel:

$$f(k) = -2\pi G \int_0^\infty \Sigma(R) J_0(kR) R\, dR \qquad (88)$$

En vez de una transformada de Fourier (sin, cos) podemos usar J, Y --->

transformada de Hankel

Hermann Hankel (14 febrero 1839 hasta 29 agosto 1873) fue un matemático alemán que nació en Halle, Alemania y falleció en Schramberg (cerca de Tübingen), Germany. El estudió y trabajó, entre otros, con Möbius, Riemann, Weierstrass y Kronecker.

Velocidad circular en el plano:

$$\frac{\mathrm{v}_c^2(R)}{R} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right|_{z=0}$$

$$\frac{d}{dR} J_0(kR) = -kJ_1(kR) \quad (89)$$

$$\frac{\mathrm{v}_c^2(R)}{R} = -\int_0^\infty f(k) J_1(kR)\, dk \quad (90)$$

Disco de Mestel

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \frac{R_0}{R} \quad (91)$$

Mestel León (nacido el 05 de agosto 1927) es un astrónomo británico que ha ganado tanto la Medalla Eddington (1993) y Medalla de Oro de la Royal Astronomical Society (2002).

$$M(R) = \int_0^R 2\pi\Sigma(R')R'\,dR' = 2\pi R_0\Sigma_0 \int_0^R dR'$$

$$= 2\pi R_0 \Sigma_0 R \tag{92}$$

$$f(k) = -2\pi G R_0 \Sigma_0 \int_0^\infty J_0(kR)\,dR$$

$$\int_0^\infty J_0(kR)\,dR = \frac{1}{k}$$

$$f(k) = -\frac{2\pi G R_0 \Sigma_0}{k} \tag{93}$$

$$\Phi(R,z) = 2\pi G R_0 \Sigma_0 \int_0^\infty \exp(-k|z|)\frac{J_0(kR)}{k}\,dk \tag{94}$$

$$\frac{v_c^2}{R} = 2\pi G R_0 \Sigma_0 \int_0^\infty J_1(kR)\,dk$$

$$\int_0^\infty J_1(kR)\,dk = \frac{1}{R}$$

$$v_c^2(R) = 2\pi G R_0 \Sigma_0 = const. \qquad (95)$$

Por el disco de Mestel:

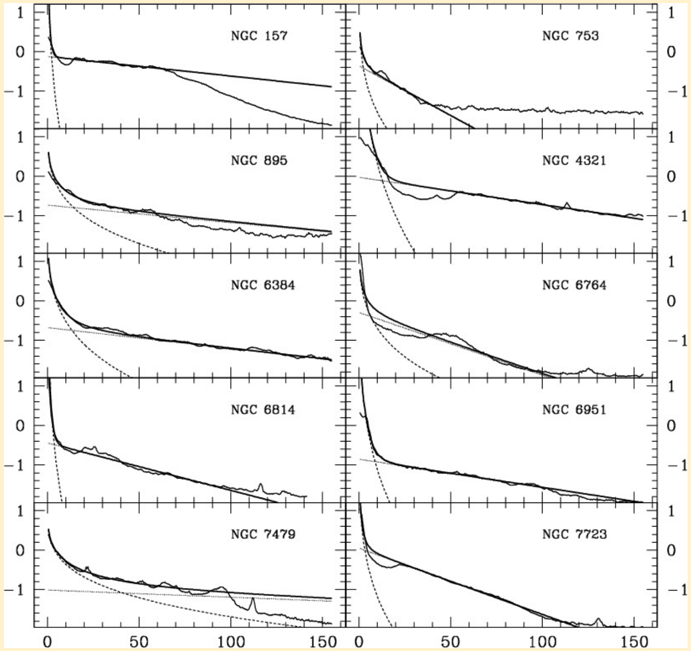
$$v_c^2(R\ ) = GM(R\ )/R$$

como un sistema esferica.

Esta relación es una buena aproximación de cualquier disco y así $v_c(R)$ es una buena medición de $M(R)$.

Exponential disc

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \exp\left(-\frac{R}{R_0}\right) \qquad (96)$$



todas las galaxias de disco tienen perfiles radiales exponencial

$$M = \int_0^\infty 2\pi\Sigma_0 \exp\left(-\frac{R}{R_0}\right) R dR = 2\pi\Sigma_0 R_0^2 \int_0^\infty \exp(-x) x\,dx = 2\pi\Sigma_0 R_0^2$$

(97)

$$x = \frac{R}{R_0} \qquad dx = \frac{dR}{R_0} \qquad \int_0^\infty \exp(-x) x\,dx = 1$$

$$f(k) = -2\pi G\Sigma_0 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{R}{R_0}\right) J_0(kR) R\,dR$$

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha x) J_0(\beta x) x\,dx = \frac{\alpha}{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)^{3/2}}$$

$$f(k) = -\frac{2\pi G\Sigma_0 R_0^2}{\left(1 + k^2 R_0^2\right)^{3/2}} \tag{98}$$

$$\Phi(R,z) = -2\pi\Sigma_0 R_0^2 \int_0^\infty \frac{J_0(kR)\exp(-kz)}{\left(1 + k^2 R_0^2\right)^{3/2}} dk \tag{99}$$

Para resolver la integral para el potencial pueden utilizar:

$$\int_0^\infty \frac{J_\upsilon(xy)dx}{\left(x^2+a^2\right)^{1/2}} = I_{\upsilon/2}(0.5ay)\cdot K_{\upsilon/2}(0.5ay)$$

Con mucho trabajo se puede encontrar al final:

$$\int_0^\infty \frac{J_0(kR)}{\left(1+k^2R_0^2\right)^{3/2}}dk = \frac{R}{2R_0^2}\left(I_0(\frac{R}{2R_0})\cdot K_1(\frac{R}{2R_0}) - I_1(\frac{R}{2R_0})\cdot K_0(\frac{R}{2R_0}) \right)$$