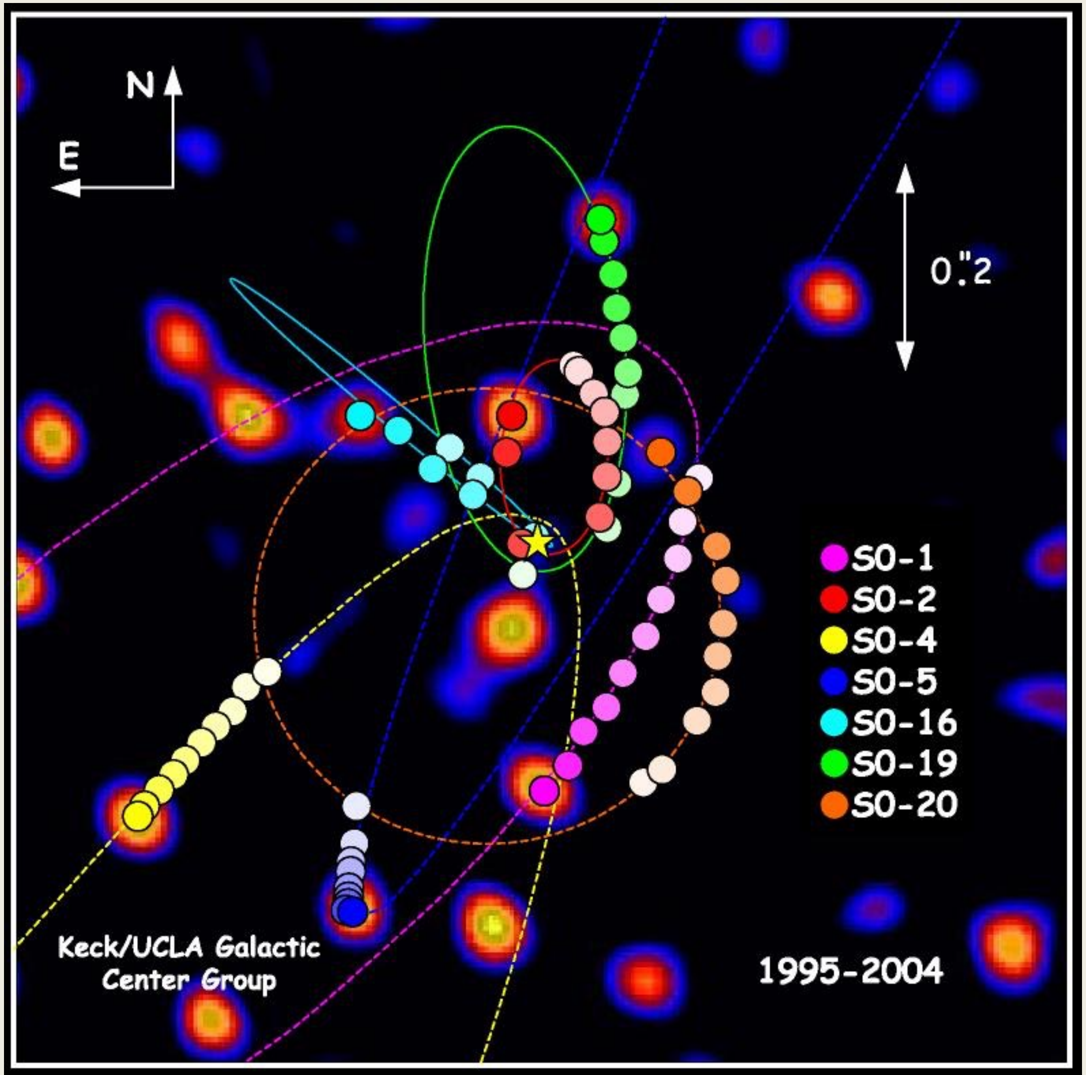
Las órbitas de las estrellas



Energy and Angular Momentum
Energía y momento angular

Newton's Law = la ley de Newton:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\underline{r}}) = m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} = m\underline{a} = -m\nabla\Phi$$

Angular Momentum = Momento angular:

$$\underline{L} = \underline{r} \times m\dot{\underline{r}}$$

Torque = esfuerzo de torsión:

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = m\underline{r} \times \ddot{\underline{r}} + m\dot{\underline{r}} \times \dot{\underline{r}} = \underline{r} \times \underline{F}$$

Kinetic Energy
energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}}$$

$$\frac{dT}{dt} = m\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}} = \underline{F} \cdot \dot{\underline{r}} = -m\dot{\underline{r}} \cdot \nabla\Phi(\underline{r})$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(\underline{r}) = \nabla\Phi \cdot \dot{\underline{r}}$$ Chain rule (regla rigurosa)

$$\frac{dT}{dt} = -m\frac{d}{dt}\Phi(\underline{r}) \Rightarrow m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} + \Phi(\underline{r})\right) = 0$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} + \Phi(\underline{r}) = const.$$

La energía total se conserva.

Órbitas en potenciales estáticos esféricos

$$\Phi(\underline{r}) = \Phi(r)$$

Equation of motion - Ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \underline{F}(\underline{r}) = -\nabla\Phi = -\hat{e}_r\frac{d\Phi}{dr} = \frac{d^2r}{dt^2}$$

Angular momentum (momento angular):

$$\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{r} \times \underline{F} = -m\frac{d\Phi}{dr}\hat{e}_r \times \underline{r} = 0$$

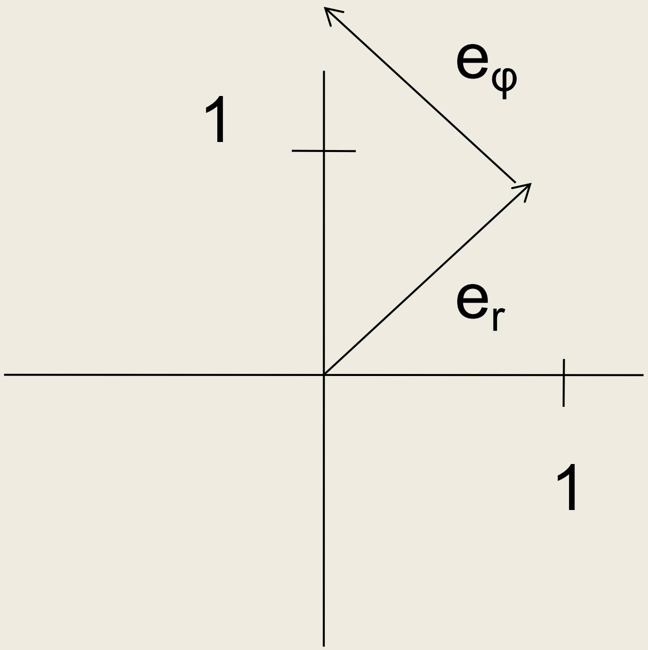
$$\Rightarrow \quad \underline{L} = m\underline{r} \times \frac{d\underline{r}}{dt} = \text{const.}$$

El vector de momento angular indica perpendicular al "Plano de la órbita" (plane of the orbit), es decir, las órbitas de las estrellas están en un plano y podemos simplificar el problema a 2D (r, φ).

Ahora estamos buscando la ecuación de movimiento en 2D:

En el tiempo t tenemos:

$$\underline{r} = r\hat{e}_r$$

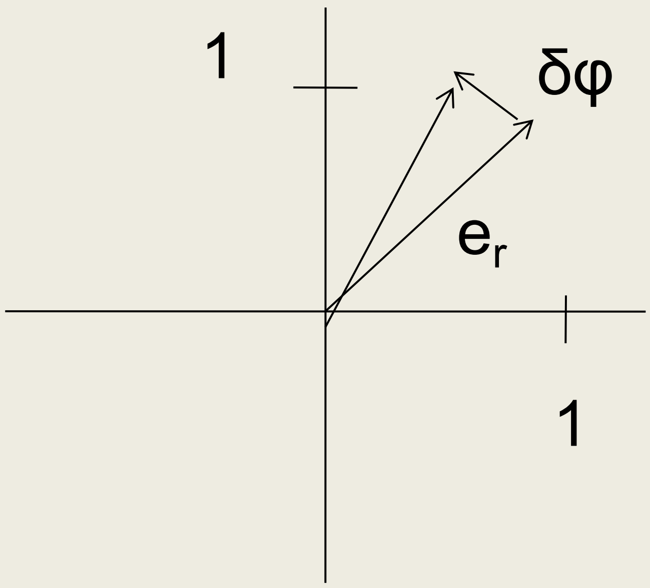


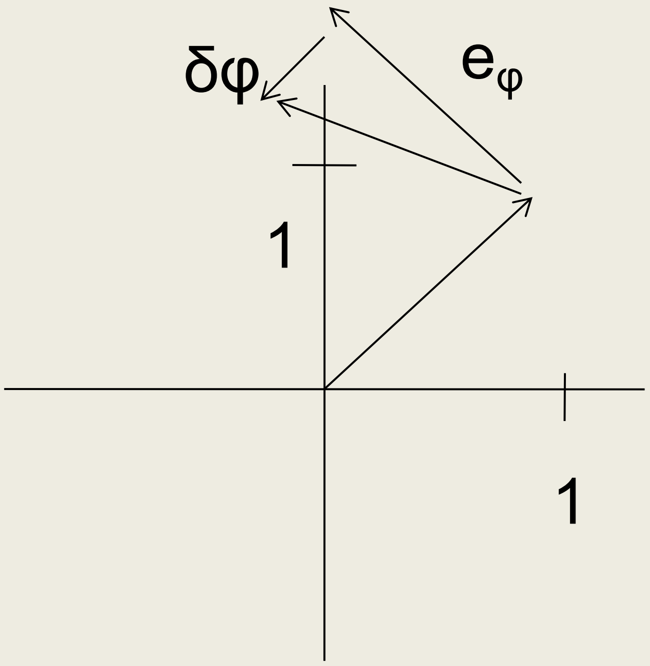
$$\frac{d}{dt}\underline{r} = \dot{r}\widehat{e_r} + r\widehat{\dot{e}_r}$$

En tiempo Δt:

$$\hat{e}_r \to \hat{e}_r + \delta\varphi\hat{e}_\varphi$$

$$\hat{e}_\varphi \to \hat{e}_\varphi - \delta\varphi\hat{e}_r \quad \Rightarrow$$





$$\frac{d}{dt}\hat{e}_r = \dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\hat{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathrm{v}} = \underline{\dot{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}} = \ddot{r}e_r + \dot{r}\dot{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}e_\varphi + r\ddot{\varphi}e_\varphi - r\dot{\varphi}\dot{e}_\varphi$$

$$= \ddot{r}e_r + \dot{r}\dot{\varphi}e_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}e_\varphi + r\ddot{\varphi}e_\varphi - r\dot{\varphi}^2 e_r$$

Las nuevas ecuaciones del movimiento son:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = F(r) = \frac{d\Phi}{dr}$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$$

$$r^2\dot{\varphi} = L = const.$$

Para obtener el camino de la órbita es necesario suprimir t de las ecuaciones y encontrar r(φ).

Establecer u = 1/r

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{u^2}\dot{\varphi} = h = const. \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = hu^2$$

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{du}\frac{du}{dt}=-\frac{1}{u^2}\dot{u}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\dot{\varphi}=-h\frac{du}{d\varphi}$$

$$\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{dt}=-h\frac{d^2u}{d\varphi^2}\dot{\varphi}=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{r}-r\dot{\varphi}^2=F(r)\rightarrow -h^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}-\frac{1}{u}h^2u^4=f_r$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=-\frac{f_r}{h^2u^2}}$$

Ecuación diferencial para u(φ) y r(φ)

Kepler potential (point mass):
Kepler potencial (masa puntual):

$$f_r = -\frac{GM}{r^2} = -GMu^2 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{GM}{h^2}$$

Solución de esta ecuación:

$$\frac{1}{r} = u = \frac{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}{\ell}$$

$$-\frac{e\cos(\varphi - \varphi_0)}{\ell} + \frac{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}{\ell} = \frac{GM}{h^2}$$

$$\text{dejar: } \ell = \frac{h^2}{GM} \quad \Rightarrow$$

$$-e\cos(\varphi - \varphi_0) + 1 + e\cos(\varphi - \varphi_0) = 1$$

e y φ_0 son constantes de integración

$$\boxed{\begin{aligned} u(\varphi) &= \frac{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}{h^2 / GM} \\ r(\varphi) &= \frac{h^2 / GM}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)} \end{aligned}}$$

e = eccentricity = excentricidad de la órbita

Si e <1, entonces u = 1/r nunca es cero y r se liga a la gama:

$$\frac{\ell}{1+e} \leq r \leq \frac{\ell}{1-e}$$

$$r_P = \frac{\ell}{1+e} \qquad r_A = \frac{\ell}{1-e} \qquad e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$$

$r_P = a\,(1 - e)$ pericentre (pericentro)

$r_A = a\,(1 + e)$ apocentre (apocentro)

La órbita es simétrica con respecto de $\varphi = 0 = \varphi_0$
El punto de máxima aproximación a r_{P} : $\varphi = 0 = \varphi_0$
El punto de mayor distancia en r_A: $\varphi = \pi$

$$r_P + r_A = 2a$$

Major axis (eje mayor) de la órbita

$$\frac{\ell}{1+e} + \frac{\ell}{1-e} = 2a \Rightarrow \ell(1-e) + \ell(1+e) = 2a(1-e^2) = 2\ell$$

$$\Rightarrow \ell = a(1-e^2) = \frac{h^2}{GM}$$

Momento angular:

$$h^2 = GM\ell = GM\, a\, (1-e^2)$$

Transformación en coordenadas cartesianas dan la ecuación de una elipse

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi + ae \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $b^2 = a^2 (1-e^2)$, longitud del eje menor (minor axis)

Energy per unit mass:
energía por unidad de masa:

$$E = \frac{1}{2}\underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}} + \Phi(r) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r}$$

Esta debe que ser constante, para que podamos evaluar en cualquier lugar de la órbita por ejemplo,

$r = r_P$ ---> $dr/dt=0$

$$r^2\dot{\varphi} = h \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{h}{r_P^2}$$

$$E = \frac{1}{2} r_p^2 \frac{h^2}{r_P^4} - \frac{GM}{r_P}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2(1-e)^2} - \frac{GM}{a(1-e)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{GMa(1-e^2)}{a^2(1-e)^2} - \frac{GM}{a(1-e)}$$

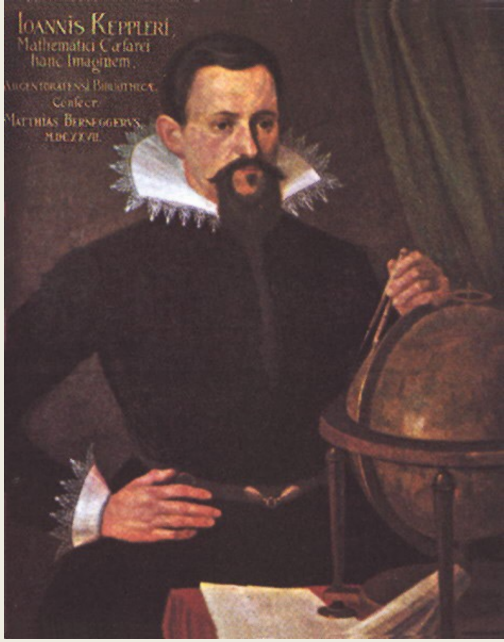
$$= \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{2}\frac{1+e}{1-e} - \frac{1}{1-e}\right) = \frac{GM}{a}\left(\frac{1+e-2}{2(1-e)}\right)$$

$$= \frac{GM}{2a}\left(\frac{e-1}{1-e}\right) = -\frac{GM}{2a} = \text{const.}$$

Hemos visto que las órbitas de los objetos en un potencial Kepleriano (masa puntual) son elipses y podemos determinar su trayectoria con 2 parámetros:

- excentricidad e y semi-eje mayor a
- pericentro r_p y apocentro r_a
- energía E y momento angular L

Kepler's Laws –
Las leyes de Kepler:



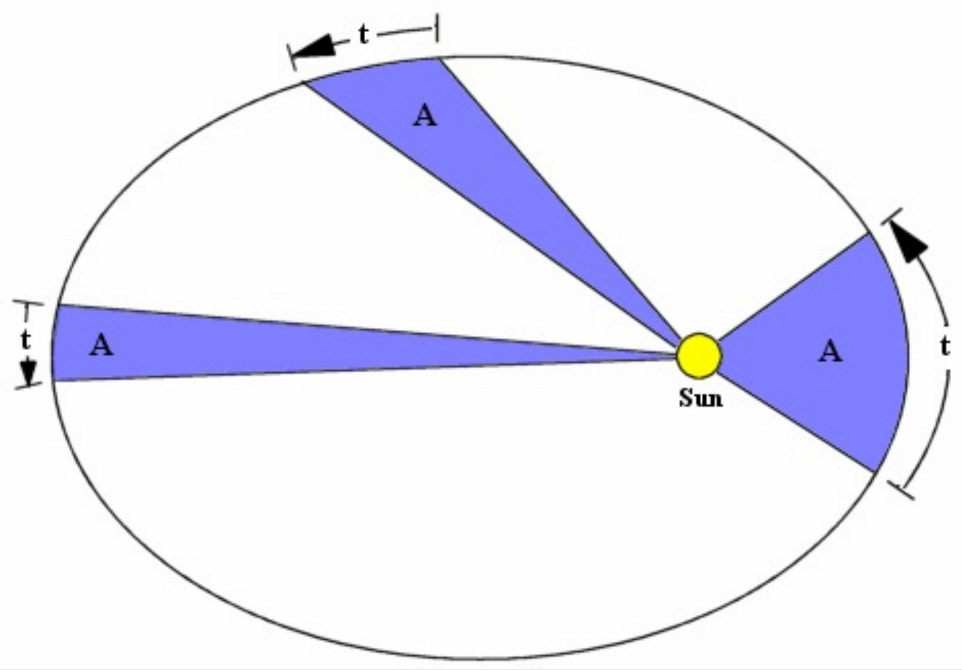
1. Las órbitas son elipses con el Sol en un foco.
2. Los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo de la órbita es proporcional al cubo del tamaño de la órbita: (período)^2 ~ (tamaño)^3

Johannes Kepler (Weil der Stadt, Alemania, 27 de diciembre de 1571 - Ratisbona, Alemania, 15 de noviembre de 1630), figura clave en la revolución científica, astrónomo y matemático alemán

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

$$(2): \qquad \delta A = \frac{1}{2} r \cdot r\delta\varphi = \frac{1}{2} r^2 \delta\varphi$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{h}{2} = const.$$



(3): en un periodo T el área barrida es un área A (= de una elipse):

$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

$$A = \int dA = \int_0^T \frac{dA}{dt} dt = \int_0^T \frac{h}{2} dt = \frac{h}{2} T$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{GMa(1 - e^2)}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \frac{a^4}{a} \frac{(1 - e^2)}{(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Unbound Orbits – Órbitas no ligado

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\varphi \quad \text{con} \quad e \geq 1$$

$$\text{if} \;\; e > 1 \;\; \text{entonces} \;\; 1 + e\cos\varphi = 0 \;\; \text{por} \;\; \varphi = \varphi_\infty$$

$$\text{entonces} \quad r \to \infty$$

$$\to \quad \cos\varphi_\infty = -\frac{1}{e}$$

$$\to \quad -\varphi_\infty \leq \varphi \leq \varphi_\infty \quad \text{y para que} \;\; \cos\varphi < 0 : \;\; \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$$

Esta órbita es una hipérbola.

Si e = 1 la partícula llega a r =>∞ a $\varphi=\pi$

Esta órbita es una parábola

$e<1$:	ellipse	$E<0$
$e=1$:	parabola	$E=0$
$e>1$:	hyperbola	$E>0$

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} - \frac{GM}{r}$$

$$\text{por } \; r \to \infty \quad E \to \frac{1}{2}\dot{r}^2$$

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\varphi \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$-\frac{\ell}{r^2}\dot{r} = -e\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{eh}{\ell}\sin\varphi$$

$$E \to \frac{1}{2}\frac{e^2h^2}{\ell^2}\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\frac{e^2h^2}{\ell^2}(1-\cos^2\varphi) = \frac{1}{2}\frac{e^2h^2}{\ell^2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

$$\text{usando } h^2 = GM\ell: \quad = \frac{\mathrm{GM}}{2\ell}(e^2 - 1)$$

Escape velocity:
la velocidad de escape

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \Phi(r)$$

Asumimos: Φ => 0 para r => ∞

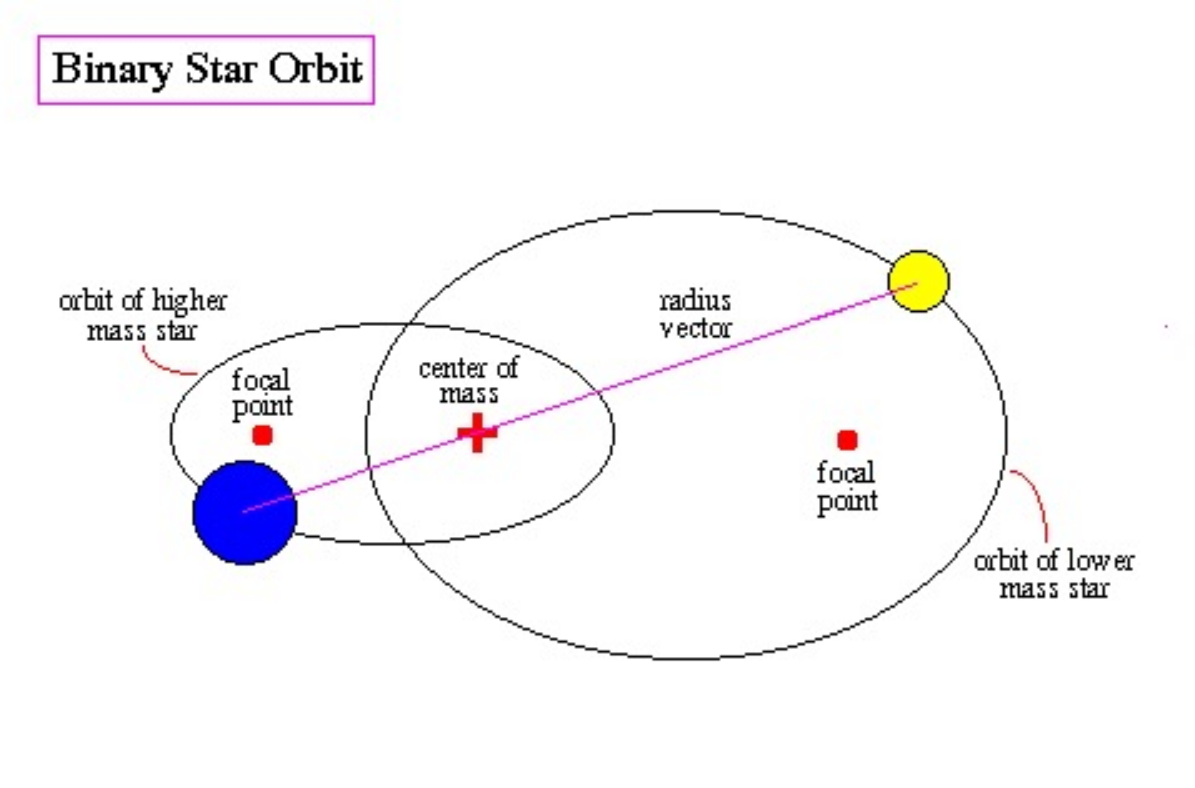
Así que en un punto r_0 una partícula tiene una velocidad v_0 tal que:

$$\frac{1}{2}\mathrm{v}_0^2 + \Phi(r_0) \geq 0$$

$$\mathrm{v}_{esc} = \sqrt{-2\Phi(r_0)}$$

Binary star orbit
la órbita de estrellas binarias

- Dos masas puntuales M_1 y M_2 en movimiento bajo la atracción gravitatoria de los demás.



Ecuaciones del movimiento:

$$M_1 \ddot{\underline{r}}_1 = -\frac{GM_1M_2}{\left|\underline{r}_1 - \underline{r}_2\right|^2} \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{\left|\underline{r}_1 - \underline{r}_2\right|} \qquad (128)$$

$$M_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \frac{GM_1M_2}{\left|\underline{r}_1 - \underline{r}_2\right|^2} \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{\left|\underline{r}_1 - \underline{r}_2\right|} \qquad (129)$$

$$(128)+(129)=0 \quad \Big| \int dt$$

$$M_1 \dot{\underline{r}}_1 + M_2 \dot{\underline{r}}_2 = const.$$

Constant momentum = impulso constante

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(M_1+M_2)}}$$

Periodo

$$\text{usando:} \quad \underline{d} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \quad \text{y} \quad \ddot{\underline{\mathrm{d}}} = \ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2$$

$$y \quad (128)/\mathrm{M}_1 + (129) / M_2 :$$

$$\ddot{\underline{d}} = -G \frac{M_1 + M_2}{d^2} \frac{\underline{d}}{d}$$

Al igual que una partícula de masa (M_1 + M_2) en el centro

Centre of mass: centro de masa

$$\underline{r}_{CM} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\underline{r}_1 + \frac{M_2}{M_1 + M_2}\underline{r}_2 \qquad (133)$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2}\left(M_1\underline{r}_1 + M_2\underline{r}_2\right) \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\dot{\underline{r}}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M_1 + M_2}\left(M_1\dot{\underline{r}}_1 + M_2\dot{\underline{r}}_2\right) = \text{const.} \quad (\text{usa}(130)) \qquad (134)$$

Así que podemos utilizar un sistema de referencia inercial con $dr_{cm}/dt = 0$ y $r_{cm}=0$

$$M_1 \underline{r_1} = -M_2 \underline{r_2} \quad \rightarrow \quad \underline{r_1} = \underline{d} + \underline{r_2} = \underline{d} - \frac{M_1}{M_2}\underline{r_1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{r_1} = \frac{M_2}{M_1 + M_2}\underline{d} \quad \text{and} \quad \underline{r_2} = -\frac{M_1}{M_1 + M_2}\underline{d} \qquad (135)$$

momento angular: $\underline{L} = M_1 \underline{r_1} \times \underline{\dot{r}_1} + M_2 \underline{r_2} \times \underline{\dot{r}_2}$

$$= \frac{M_1 M_2^2}{\left(M_1 + M_2\right)^2}\underline{d} \times \underline{\dot{d}} + \frac{M_2 M_1^2}{\left(M_1 + M_2\right)^2}\underline{d} \times \underline{\dot{d}}$$

$$= \frac{M_1 M_2^2 + M_2 M_1^2}{\left(M_1 + M_2\right)^2}\underline{d} \times \underline{\dot{d}} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\underline{d} \times \underline{\dot{d}} \qquad (136)$$

We define the reduced mass μ:
Definimos la masa reducida μ:

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$$

$$\rightarrow \underline{L} = \mu \underline{h}$$

Specific angular momentum
momento angular específico

Volver a las órbitas de los potenciales esféricas generales:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=-\frac{f(1/u)}{h^2u^2} \qquad (139)$$

$$f(1/u)=-\frac{d\Phi}{dr}=u^2\frac{d\Phi}{du} \qquad \text{usando} \quad dr=-\frac{1}{u^2}du$$

$$\text{usando (139)}\cdot\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}\varphi}: \qquad \frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\frac{du}{d\varphi}+\frac{u^2}{h^2u^2}\frac{d\Phi}{du}\frac{du}{d\varphi}=0$$

$$\text{term1:} \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\frac{1}{2}\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2}=\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

$$\text{term2:} \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{2}u^2\right)=\frac{1}{2}u\frac{du}{d\varphi}+\frac{1}{2}u\frac{du}{d\varphi}=u\frac{du}{d\varphi}$$

$$\text{term3:} \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\Phi}{h^2}\right)=\frac{1}{h^2}\frac{d\Phi}{d\varphi}=\frac{1}{h^2}\frac{d\Phi}{du}\frac{du}{d\varphi}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}u^2+\frac{\Phi}{h^2}\right)=0 \quad |\int d\varphi$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}u^2+\frac{\Phi}{h^2}=const.=\frac{E}{h^2} \qquad (140)$$

usando: $h=r^2\dot{\varphi}$

$$E=\frac{r^4\dot{\varphi}^2}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2+\Phi(r)$$

$$=\frac{r^4}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2+\Phi(r)$$

$$=\frac{r^4}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2+\Phi(r)$$

$$=\frac{r^4}{2}\left(\frac{du}{dr}\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2+\Phi(r) \quad \text{usando} \quad \frac{du}{dr}=\frac{1}{r^2}$$

$$=\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2+\Phi(r) \quad \rightarrow \quad \text{E es la energía por unidad de masa}$$

Para las órbitas de la envolvente (bound orbits) los valores límite de u (o r) son donde se producen du/dφ = 0 (con eq. (140)):

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{\Phi}{h^2} = \frac{E}{h^2} \quad \rightarrow \quad u^2 = \frac{2E - 2\Phi(u)}{h^2} \qquad (142)$$

(142) tiene soluciones $u_{1,2}$ (o $r_{1,2}$) que son equivalentes al pericentro y apocentro

El período radial T_r se define como el tiempo de ir de r_2 --> r_1 --> r_2; usando (141):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2(E-\Phi(r)) - r^2\dot{\varphi}^2 \qquad h = r^2\dot{\varphi}$$

$$= 2(E-\Phi(r)) - \frac{h^2}{r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{2(E-\Phi(r)) - \frac{h^2}{r^2}} \tag{143}$$

$$\mathrm{T_r} = \oint dt = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{dr}\,dr = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{2(E-\Phi(r)) - \frac{h^2}{r^2}}}\,dr \tag{144}$$

Durante T_r φ se incrementa por la cantidad de

$$\Delta\varphi = \oint d\varphi = 2\int_{r1}^{r2} \frac{d\varphi}{dr} dr = 2\int_{r1}^{r2} \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dr} dr$$

$$\Delta\varphi = 2h\int_{r1}^{r2} \frac{1}{r^2\sqrt{2(E-\Phi(r)) - \frac{h^2}{r^2}}} dr \qquad (145)$$

Definir velocidad angular media:

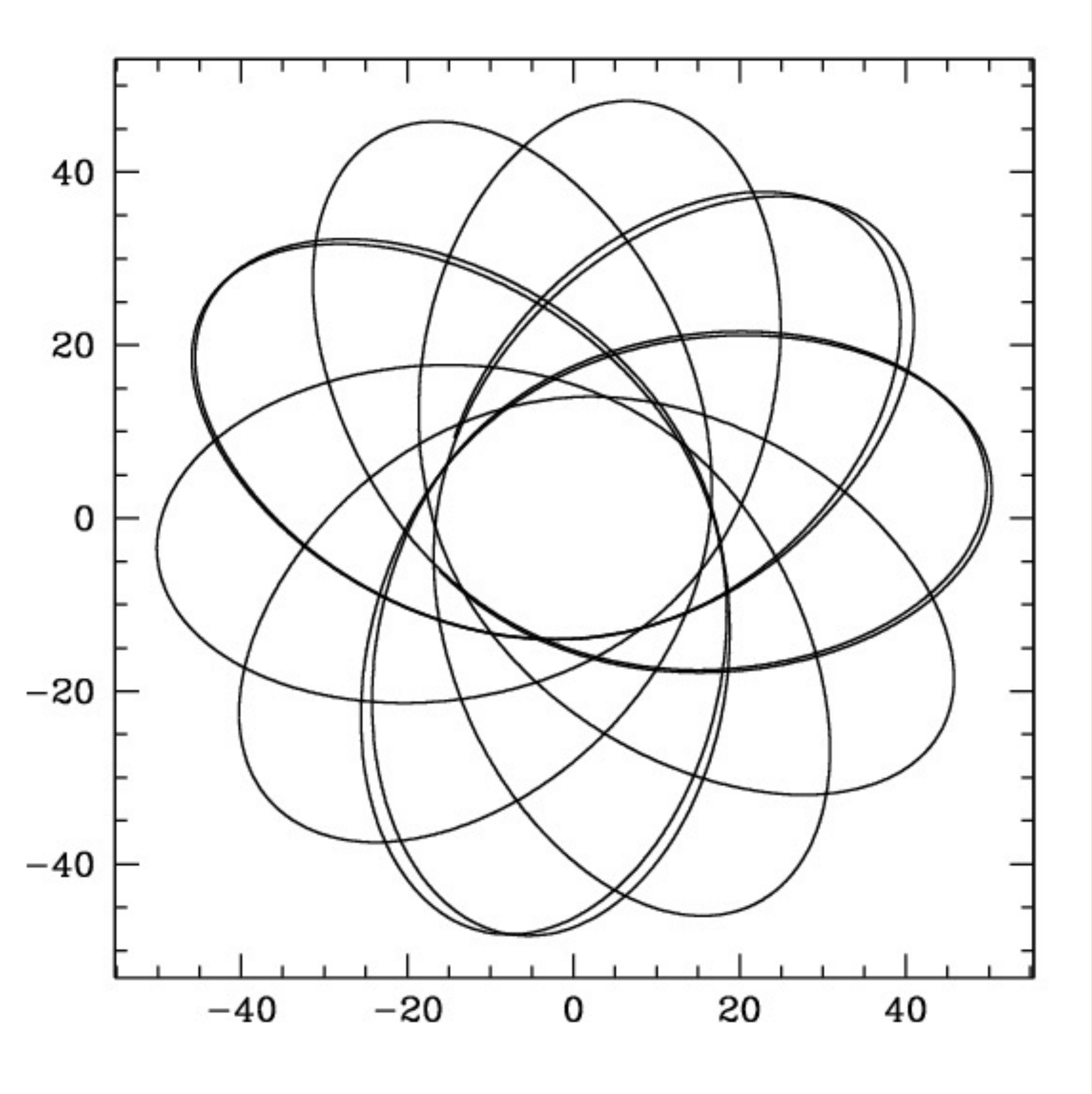
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{T_r}$$

Azimuthal period
período azimutal

$$T_\varphi = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} T_r$$

Unless $\Delta\varphi/2\pi$ is a rational number the orbit is not closed. ===> Rosetta orbits

A menos que $\Delta\varphi/2\pi$ es un número racional, la órbita no está cerrada. ===> Rosetta órbitas



40
20
0
−20
−40
−40
−20
0
20
40

En un período de Tr el apocentro (pericentro) avanza por un ángulo Δφ - 2π = precesión = precession

es decir, los cambios de órbita en acimut a una velocidad media de precesión

$$\Omega_p = \frac{\Delta\varphi - 2\pi}{T_r}$$

The precession period is - El período de precesión es:

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega_p} = \frac{T_r}{\frac{\Delta\varphi}{2\pi} - 1}$$

Kepler: $\Delta\varphi = 2\pi$ ==> $T_\varphi = T_r$ y $\Omega_p = 0$

Sin pruebas: en el potencial de Kepler

$$T_r = \frac{2\pi GM}{(-2E)^{3/2}}$$