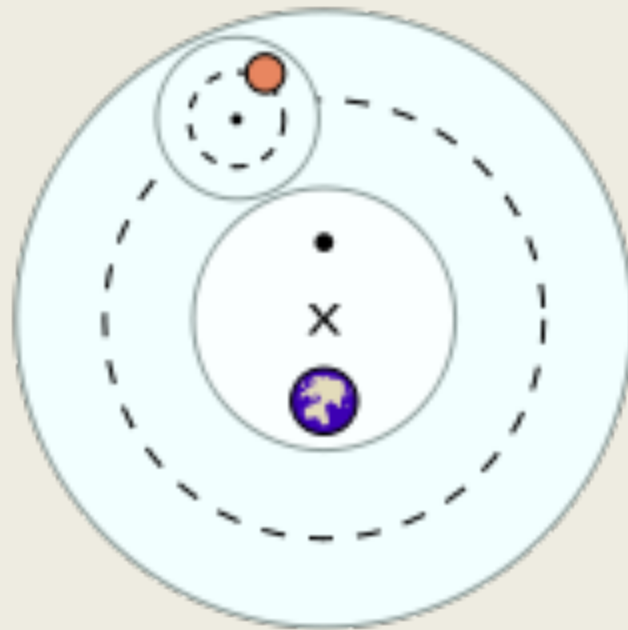


Órbitas circular y órbitas cerca de circular



Curva de rotación de nuestra Galaxia

Differential Rotation

Rotación diferencial

Todo en la Galaxia órbita alrededor del centro galáctico (Galactic Centre, GC)

Material más cerca del centro viaja más rápido en las órbitas (tarda menos tiempo en realizar una órbita completa)

De la misma forma que los planetas orbitan el Sol

Períodos orbitales a diferentes distancias de la GC nos dicen qué está la distribución de la masa de la Galaxia

La velocidad de una estrella a la distancia R depende sólo de $M(R)$. Esa masa se comporta como si se concentra en el centro.

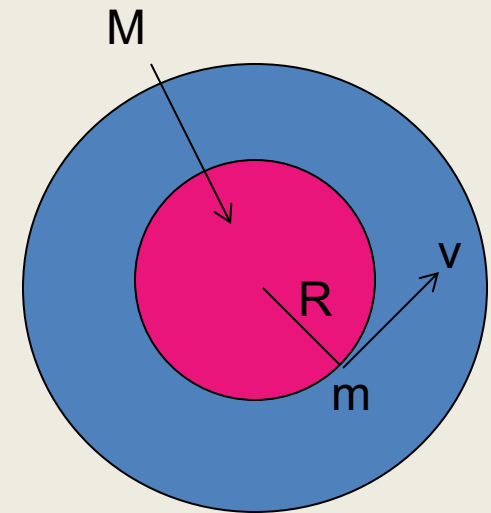
Para un objeto con masa m a una distancia R , la gravedad debe equilibrar la aceleración del movimiento circular

$$GM(R)m / R^2 = mv(R)^2 / R$$

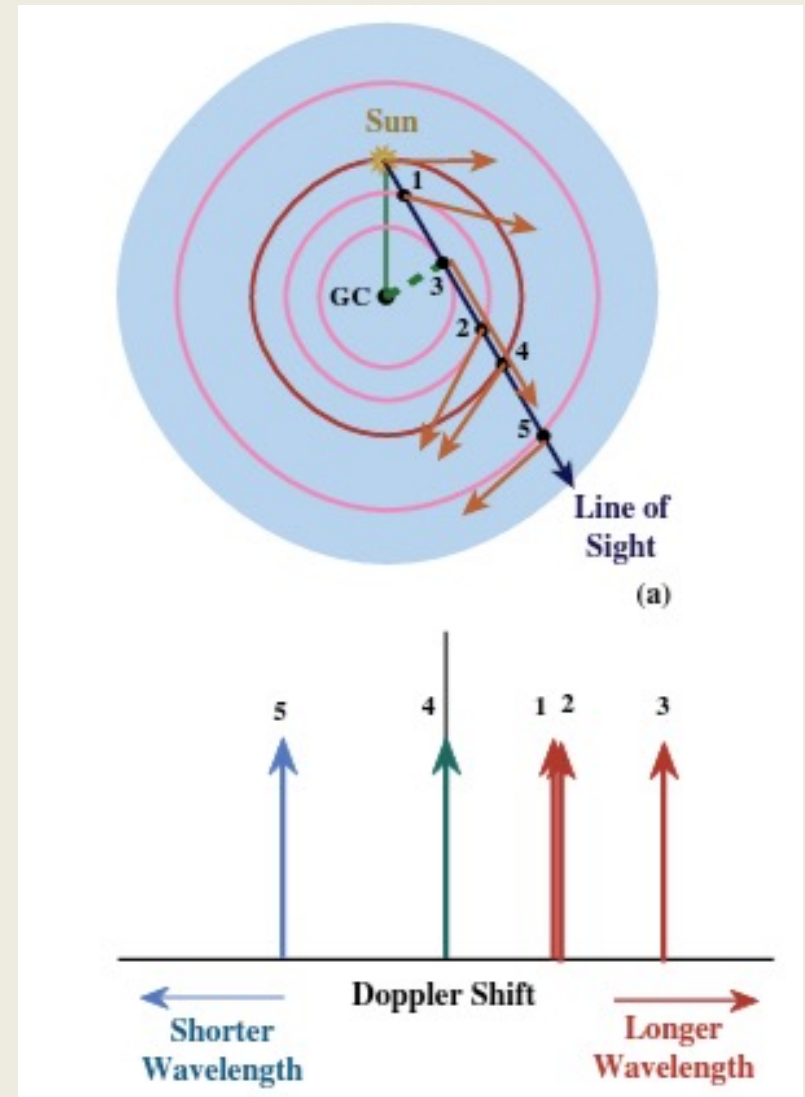
$$\rightarrow M(R) = v(R)^2 R / G$$

\rightarrow Medida $v(R)$ y recibe $M(R)$

$\rightarrow v(R)$ es la curva de rotación de la galaxia



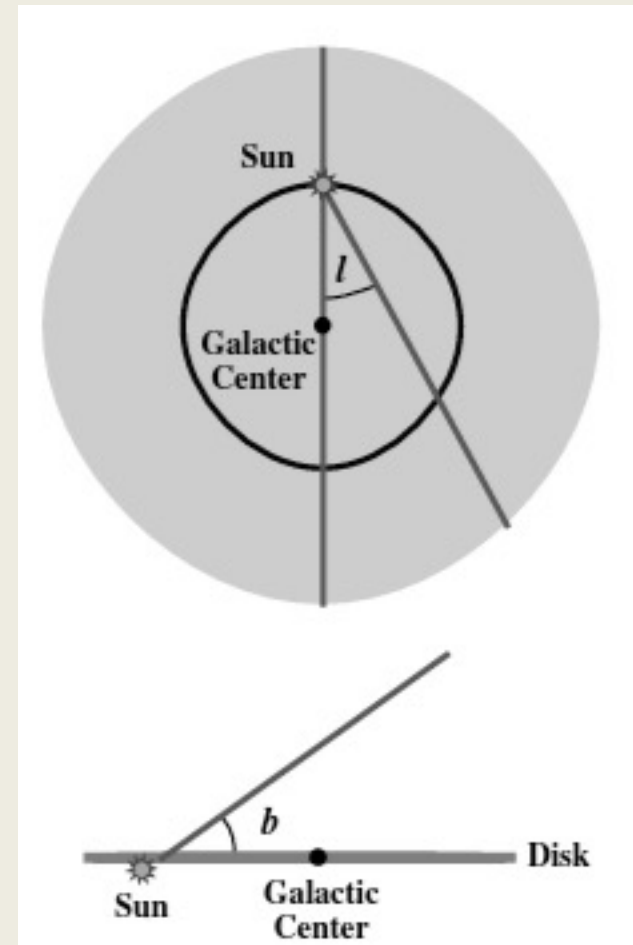
la rotación galáctica diferencial produce efecto Doppler en las líneas de emisión de gas en el disco galáctico



Para determinar la curva de rotación de la Galaxia, definir coordenadas Galácticas (**Galactic Coordinates**)

b = latitud galáctica en grados por encima / por debajo del disco galáctico

l = longitud galáctica en grados de la GC



Determinación de la curva de rotación de la MW

Medido a partir de observaciones de línea de 21 cm

Suponga órbitas circulares y que hay alguno hidrógeno a lo largo de cualquier línea de visión

Especialmente importante que existe gas en el punto subcentral

¿Qué es eso?

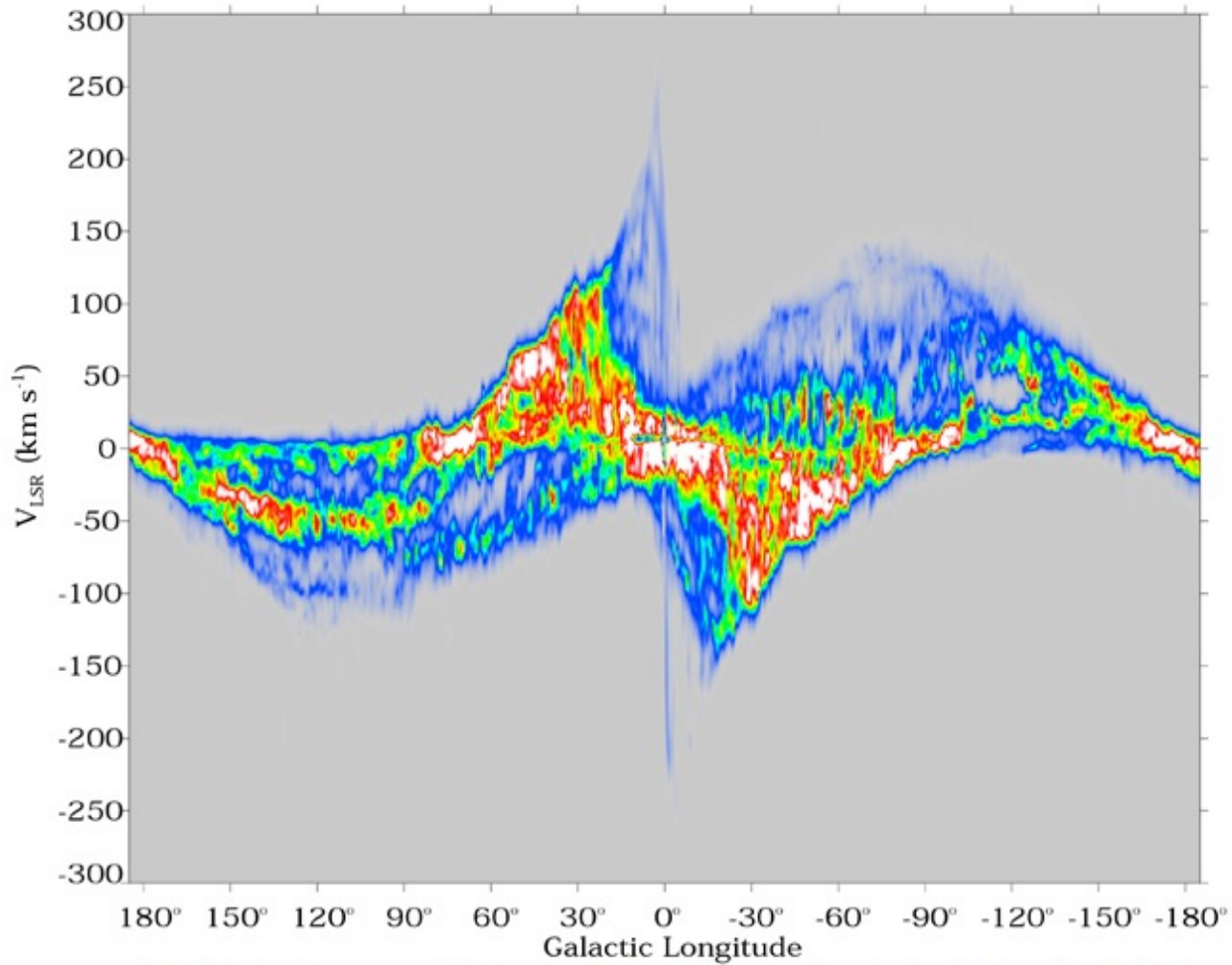
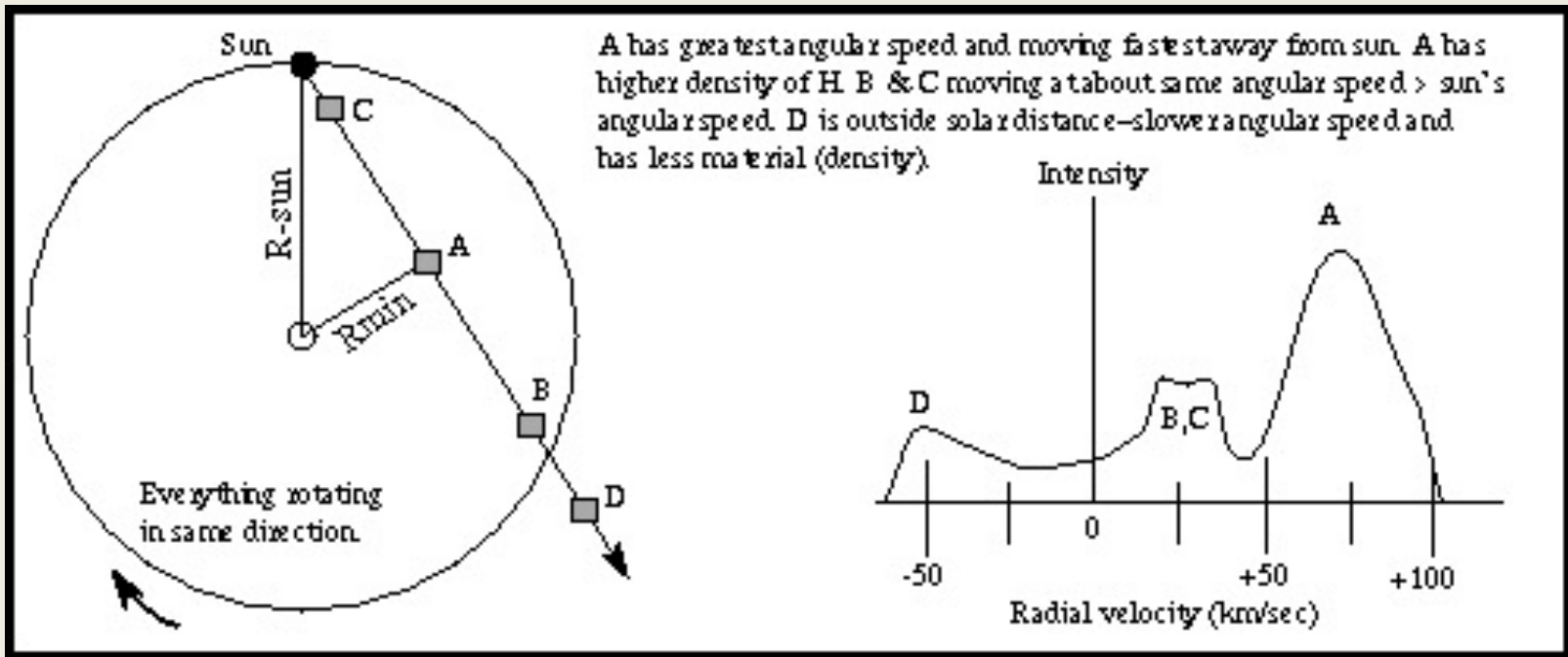


Fig 2.20 (D. Hartmann) 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP 2007



Buscar turno máximo de 21 cm a lo largo de la línea recta dada de la vista

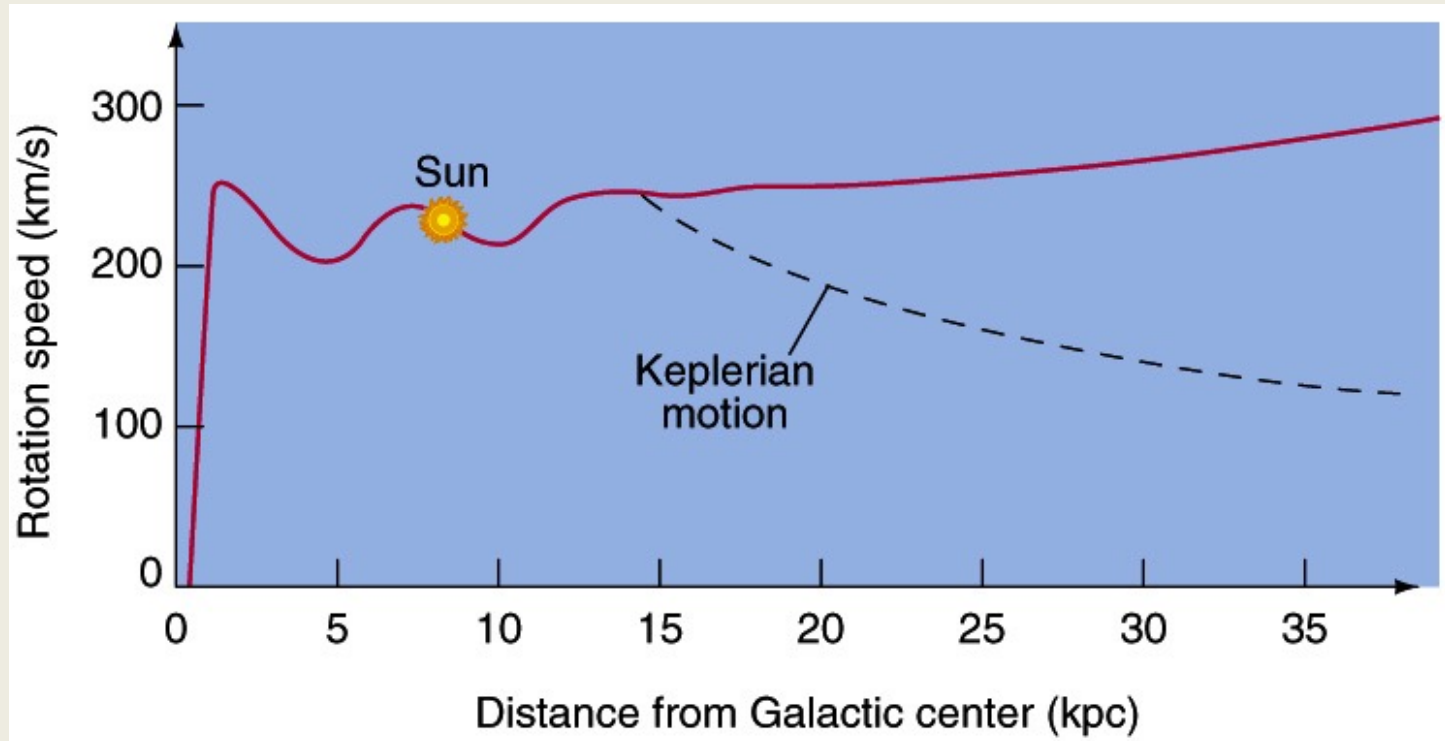
Asignar esto desplazamiento Doppler en el punto subcentral (máximo acercamiento a la GC) R_{\min}

Al estudiar los valores de longitudes de 0 a 90 grados, R_{\min} van desde 0 a R_0

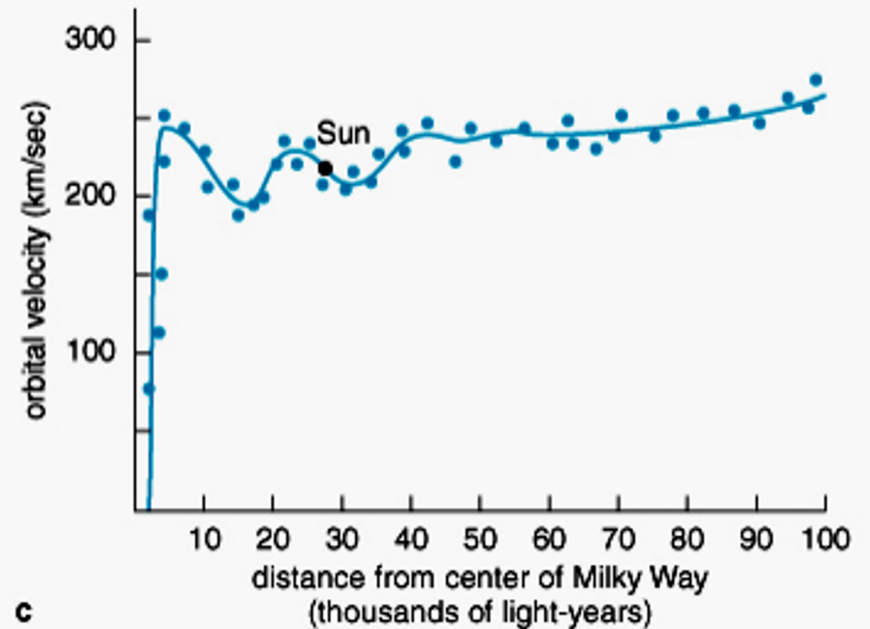
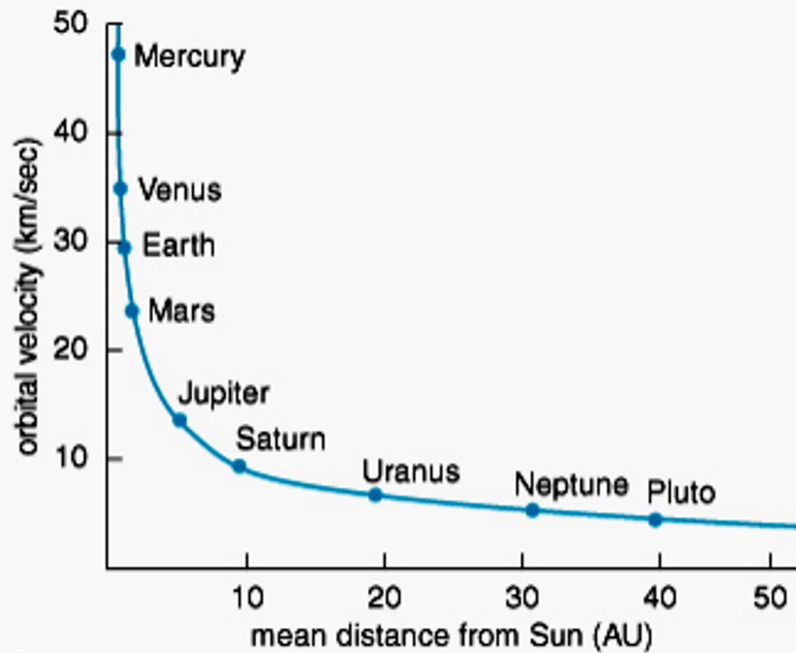
Limitaciones:

- No existe gas en el punto subcentral
- órbitas no circulares
- En $R_{\min} = 0$ y en R_0 está difícil de medir la curva (pequeña velocidad Doppler difícil de determinar)

Curva de rotación combinada no muestra descenso más allá del borde del disco visible. Dado que la materia se reduce luminoso más allá de 15 kpc, material adicional no luminosa (es decir, la materia oscura) debe existir en la galaxia!



$$V = \sqrt{\frac{G * M_{\text{interior}}}{\text{Radius}}}$$



Nearly circular orbits

órbitas casi circulares

Recuerde:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{d\Phi}{dr}$$

$$r^2\dot{\varphi} = h = \text{const}$$

Para una órbita circular $r = R = \text{const.}$ ($dr/dt=0$)
y $d\varphi/dt = \Omega = \text{const.}$

la 2. se cumple trivialmente y la 1. se lee:

$$R\Omega^2 = -\left.\frac{d\Phi}{dr}\right|_{r=R}$$

Si podemos decir que

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

se escribe

$$R\Omega^2 = \frac{GM}{R^2}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Ahora:

$$r = R + \varepsilon(t) \quad \varepsilon \ll R$$

$$\dot{\phi} = \Omega + \omega(t) \quad \omega \ll \Omega$$

$$h = R^2\Omega \approx (R + \varepsilon)^2(\Omega + \omega) \approx (R^2 + 2R\varepsilon)(\Omega + \omega)$$

$$\approx R^2\Omega + 2R\Omega\varepsilon + R^2\omega \quad \Rightarrow$$

$$R\omega = -2\varepsilon\Omega$$

$$\ddot{\varepsilon} - (R + \varepsilon)(\Omega^2 + 2\Omega\omega) = f(R + \varepsilon)$$

$$\ddot{\varepsilon} - R\Omega^2 - \varepsilon\Omega^2 - 2R\Omega\omega = f(R) + \varepsilon f'(R)$$

$$\ddot{\varepsilon} - \varepsilon\Omega^2 - 2R\Omega\omega = \varepsilon f'(R)$$

$$\ddot{\varepsilon} + 3\varepsilon\Omega^2 = \varepsilon f'(R)$$

$$\ddot{\varepsilon} + (3\Omega^2 - f'(R))\varepsilon = 0$$

(es un movimiento armónico simple y estable si:

$$\Omega_R^2 = 3\Omega^2 - f'(R) > 0$$

$$f'(R) + 3\frac{f(R)}{R} < 0$$

$$\frac{d}{dR}(R^3 f) = 3R^2 f + R^3 f' \quad | \quad \div R^3$$

$$3\frac{f}{R} + f' < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dR}(R^3 f) < 0$$

Así que si $f(R) \sim -R^{-n}$, es estable sólo si $n < 3$,
Es decir: inestable si el potencial es demasiado
empinada

Precession

Precesión

En una primera aproximación, una partícula (estrella) órbita al origen con un período

$$T = 2\pi / \Omega.$$

Ejecuta movimiento radial con un período de

$$T_r = 2\pi / \Omega_R$$

donde

$$\Omega_R^2 = 3\Omega^2 - f(R).$$

- En general Ω_R no es igual a Ω por lo que la órbita no es cerrada.
- La órbita es una elipse que gira (movimiento de precesión) con un período

$$2\pi/\Omega_p$$

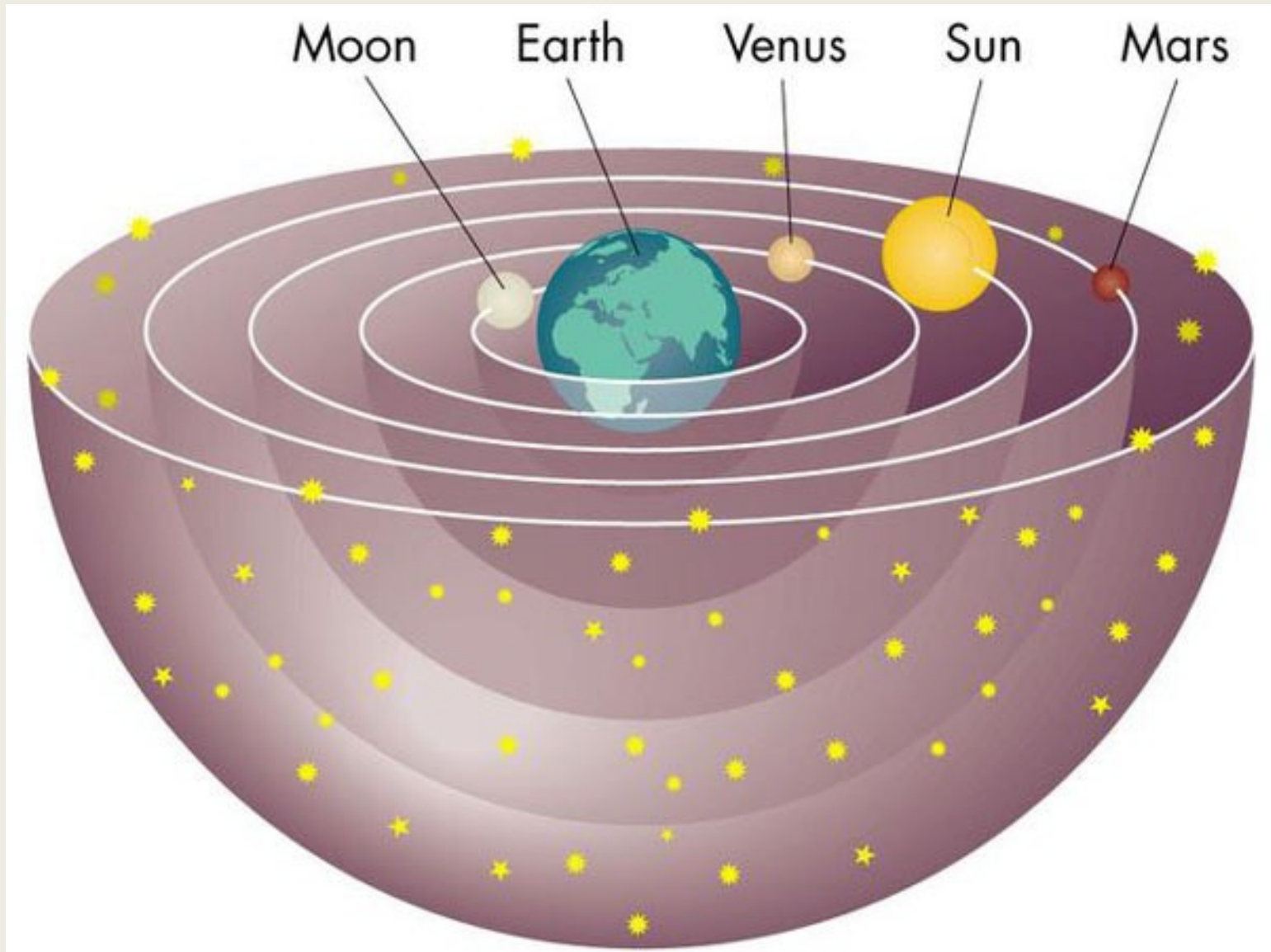
- donde

$$\Omega_p = \Omega - \Omega_R.$$

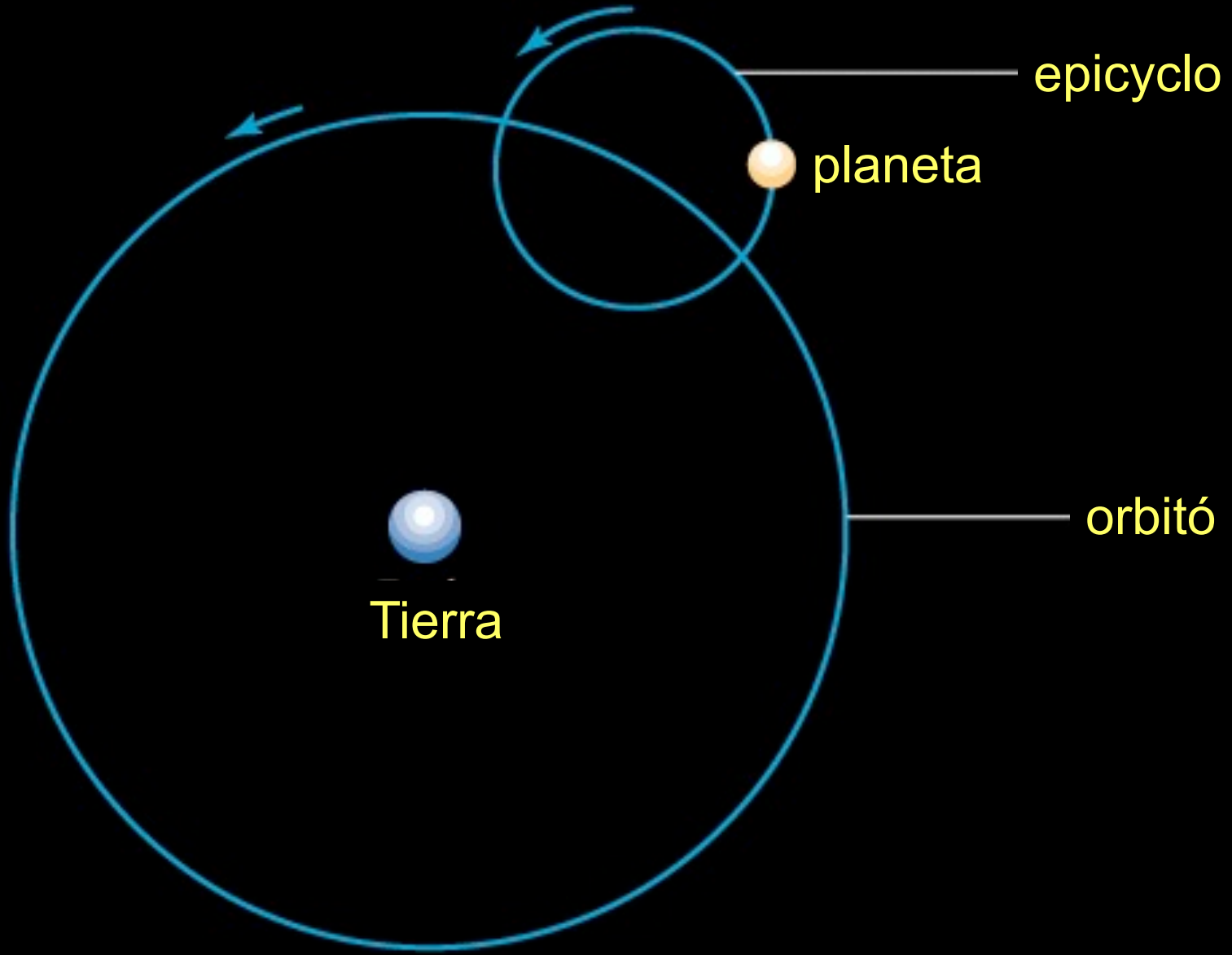
Epicycles (epicyclic approximation)

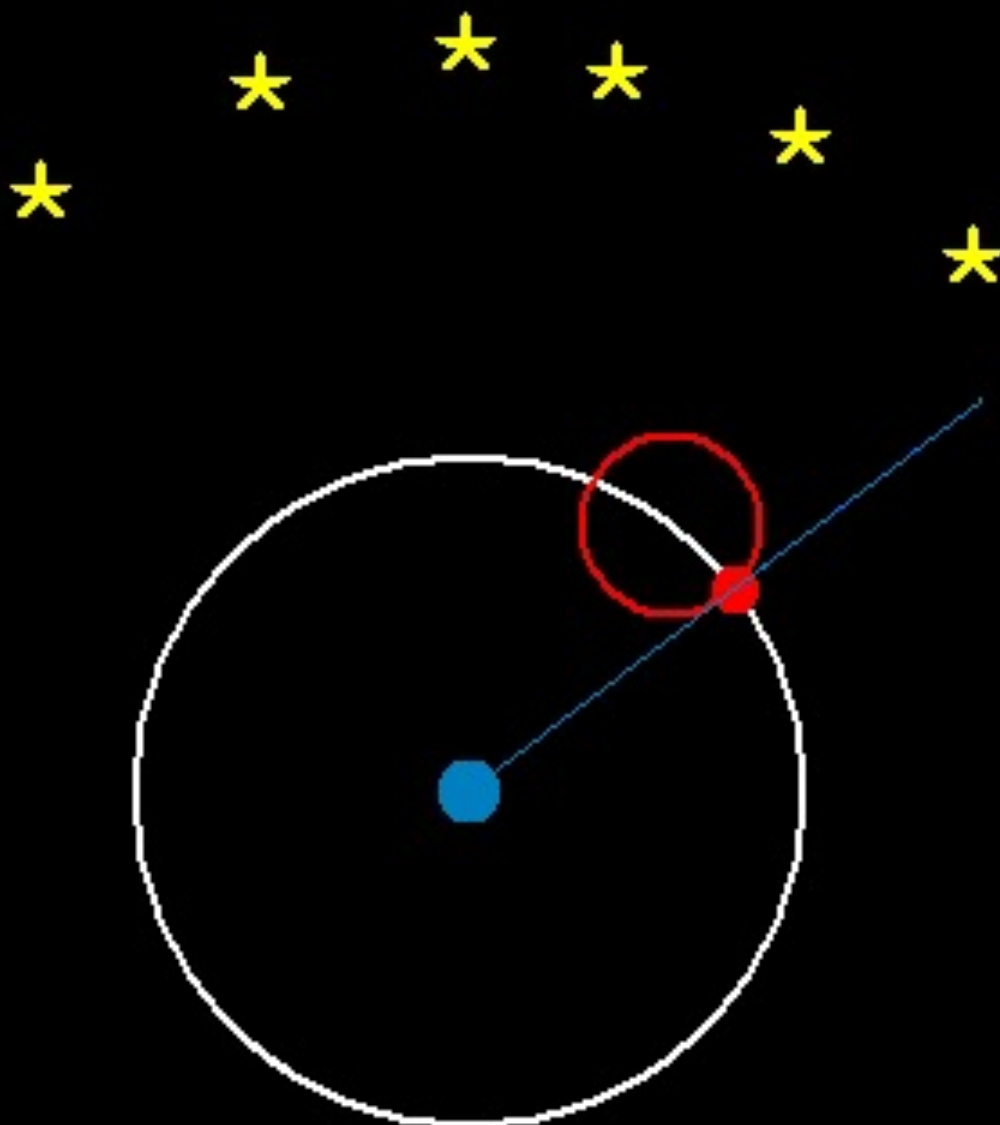
Epícciclos (aproximación epíccicloidal)

La teoría epíccicloidal describe órbitas casi circulares (por ejemplo, el Sol alrededor de la Vía Láctea, un planeta alrededor del Sol)



Modelo geocentrico





Movimiento de las Planetas en el Modelo geocentrico

Hemos visto que una galaxia normalmente no es esferica.

Pero una simetria axial, con $\Phi(z) = \Phi(-z)$ es una buena aproximación.

Entonces:

$$\Phi(R, \varphi, z) = \Phi(R, z)$$

de la ecuación

$$\underline{F} = -\nabla\Phi$$

optenemos

$$\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial R}$$

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Podemos definir un potencial efectivo para una orbita con un momento angular de

$$L_z = R^2 \dot{\phi} = R^2 \Omega = \text{const.}$$

como

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}$$

Entonces la ecuación de movimiento en la dirección R se escribe fácilmente como

$$\ddot{R} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R}$$

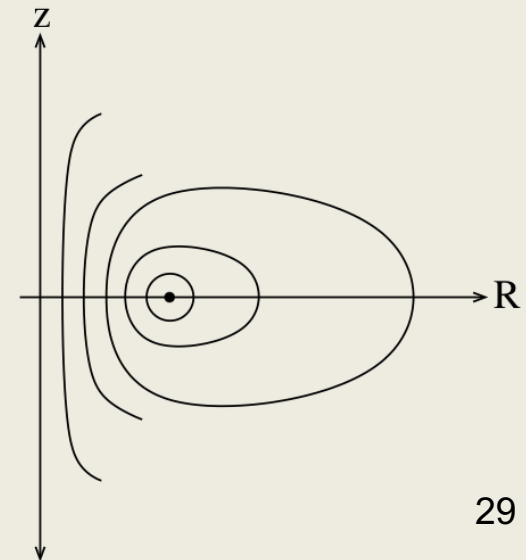
La ecuación de movimiento en la dirección z se escribe:

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z}$$

La ecuación de energía se escribe como

$$E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \Phi_{eff}$$

Si dibujamos curvas de potencial efectivo constante, vemos que para una L_z determinada, la energía mínima efectiva es en el punto R_g en el eje R .



Una partícula con exactamente esta energía mínima estará en órbita circular, con frecuencia orbital Ω de tal manera que

$$\Omega^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R}$$

Para muchos potenciales de simetría axial, estamos interesados principalmente en las trayectorias que son casi circular con una frecuencia media orbital $\Omega(R)$ en cada radio R .

Esta órbita circular actúa como centro de guía de la órbita perturbada que queremos estudiar.

Cerca de esta órbita de equilibrio, podemos ampliar el potencial efectivo de la radio guía R_g y el plano ecuatorial $z = 0$.

Definimos $x = R - R_g$ y usamos el potencial efectivo en una serie de Taylor

$$\Phi_{eff}(x, z) = \Phi_{eff} |_{R_g, 0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right) |_{R_g, 0} x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right) |_{R_g, 0} z^2 + \dots$$

Definimos las siguientes dos nuevas cantidades
(frecuencias epicycloidal = **epicyclic frequencies**)

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right) \Big|_{R_g, 0}$$
$$\nu^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right) \Big|_{R_g, 0}$$

Entonces las ecuaciones del movimiento son

$$\ddot{x} = -K^2 x$$

$$\ddot{z} = -\nu^2 z$$

Estas son las ecuaciones de dos osciladores armónicos con la frecuencia epicycloidal κ y la frecuencia vertical ν .

Soluciones:

$$x(t) = x_0 \cos(\kappa t + \psi)$$

$$z(t) = z_0 \cos(\nu t + \xi)$$

frecuencia circular

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial R^2} \right) \Big|_{R_g,0}$$

$$\kappa^2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \Big|_{R_g,0} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(\frac{L_z^2}{2R^2} \right)$$

$$\kappa^2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \Big|_{R_g,0} + \frac{3L_z^2}{R^4}$$

empezamos con:

$$L_z = R^2 \Omega$$

sabemos

$$\Omega^2(R) = \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{L_z^2}{R^4}$$

$$\kappa^2 = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + 3\Omega^2$$

$$\kappa^2 = \frac{\partial}{\partial R} (R\Omega^2) + 3\Omega^2$$

$$\kappa^2 = \Omega^2 + R \frac{\partial \Omega^2}{\partial R} + 3\Omega^2$$

$$\kappa^2 = R \frac{\partial \Omega^2}{\partial R} + 4\Omega^2$$

Que está ocurriendo en la dirección φ si la estrella ejecuta las oscilaciones radiales?

La posición angular en la órbita puede resolverse para el uso de la conservación del momento angular y el hecho que

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{R^2} = \frac{L_z}{R_g^2} \left(1 + \frac{x}{R_g}\right)^{-2} \approx \Omega_g \left(1 - \frac{2x}{R_g}\right)$$

primer término
es el
movimiento
circular

$$\dot{\varphi} = \Omega_g - \frac{2\Omega_g}{R_g} x_0 \cos(\kappa t + \psi) \quad | \int dt$$

$$\varphi - \varphi_0 = \Omega_g t - \frac{2\Omega_g}{\kappa R_g} x_0 \sin(\kappa t + \psi)$$

$$y(t) = -\frac{2\Omega_g}{\kappa} x_0 \sin(\kappa t + \psi) = y_0 \sin(\kappa t + \psi)$$

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{\kappa}{2\Omega_g}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x_0}{y_0} = \frac{\kappa}{2\Omega_g} \leq 1$$

donde el límite inferior (1/2) corresponde a un potencial kepleriana y el límite superior (1) corresponde a un potencial armónico.

Oort's Constants

Constantes de Oort

Las constantes de Oort (descubiertos por Jan Oort) A y B son parametros derivados empíricamente que caracterizan las propiedades locales de rotación de nuestra galaxia, la Vía Láctea, de la siguiente manera:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} - \frac{dv_c}{dR} \right) \Big|_{R_0}$$

$$B = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} + \frac{dv_c}{dR} \right) \Big|_{R_0}$$

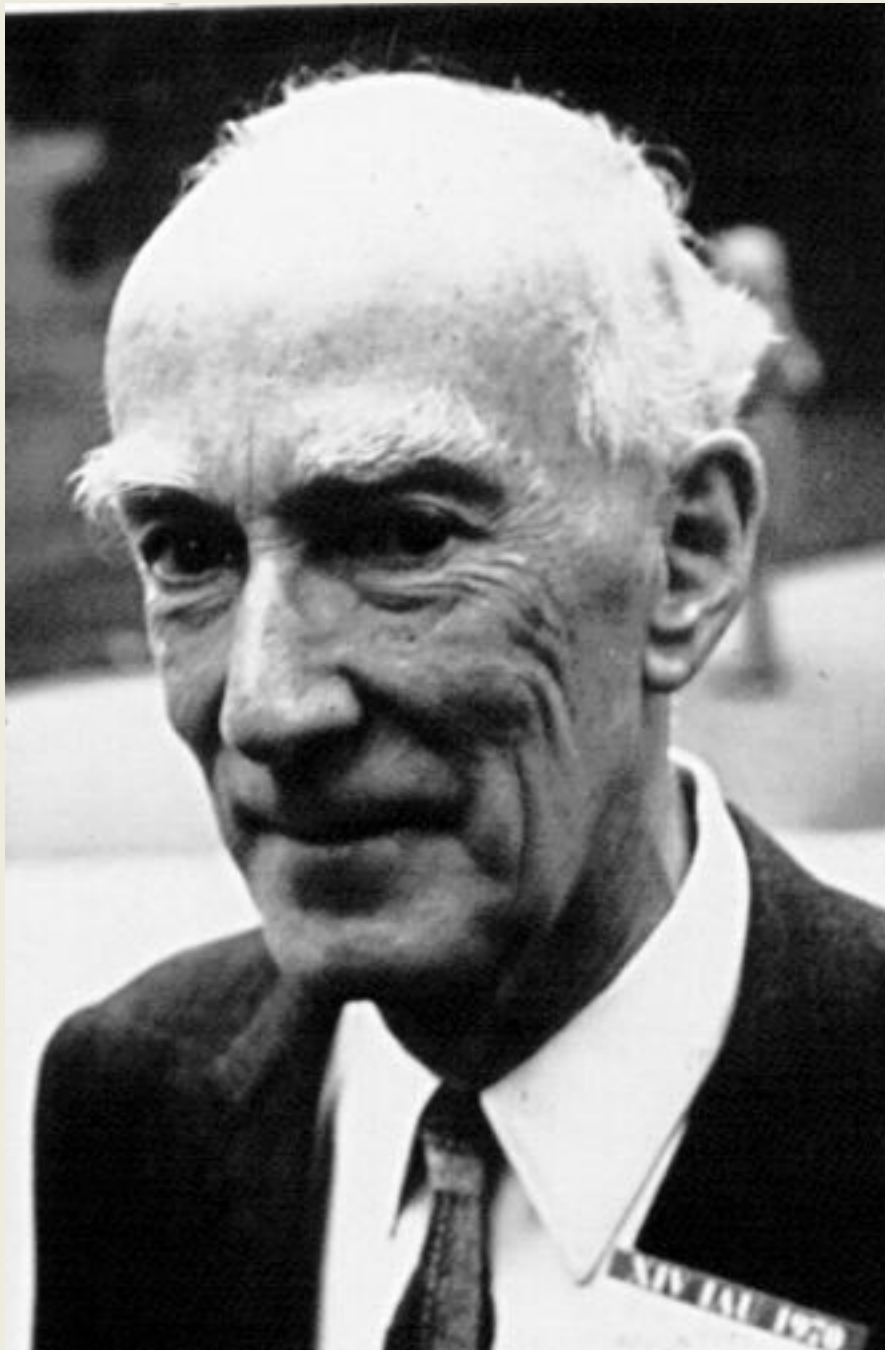
donde v_c y R_0 son la velocidad de rotación y la distancia al centro galáctico, respectivamente, medidos en la posición del Sol.

Dependen sólo de los movimientos y las posiciones de las estrellas en la vecindad solar.

A partir de 2018, los valores más precisos de estas constantes son

- $A = 15.3 \pm 0.4 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ y
- $B = -11.9 \pm 0.4 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

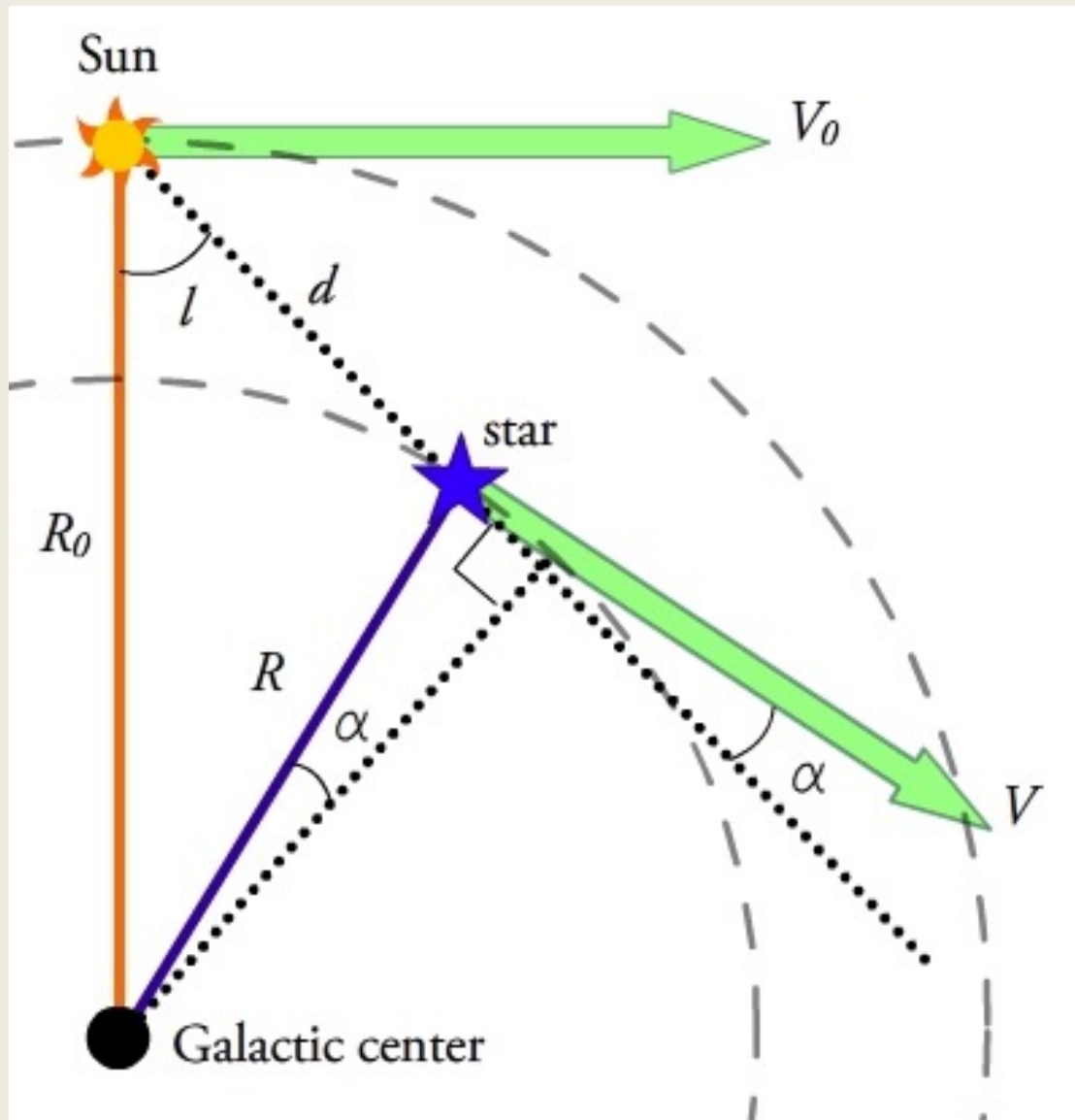
Con las constantes de Oort, es posible determinar las propiedades orbitales del Sol, como la velocidad orbital y el período, e inferir las propiedades locales del disco galáctico, tales como la densidad de masa y cómo los cambios en la velocidad de rotación en función del radio desde el centro galáctico.



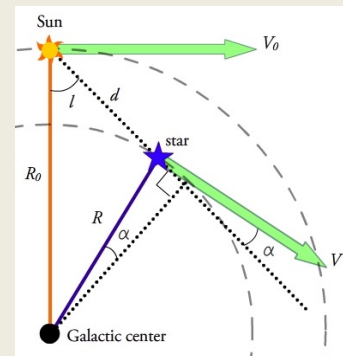
Jan Hendrik Oort (28 de abril de 1900 – 5 de noviembre de 1992) fue un astrónomo holandés internacionalmente conocido. Estimuló de manera especial la radioastronomía. Es conocido porque el toroide de cometas que envuelve el Sistema Solar recibió su nombre, nube de Oort. Oort nació en Franeker en Frisia y estudió en Groninga con Jacobus Cornelius Kapteyn. Su tesis doctoral se tituló Estrellas de gran velocidad. En 1927 probó que la Vía Láctea rotaba, analizando el movimiento de las estrellas. En 1935 consiguió el puesto de profesor en la Universidad de Leiden, donde Ejnar Hertzsprung era el director.

Para confirmar la rotación de nuestra galaxia, en 1927 Jan Oort deriva una forma de medir la rotación galáctica de sólo una pequeña fracción de estrellas en la vecindad local.

Como se describe a continuación, los valores se encontraron y demostró no sólo que el Galaxy estaba rotando pero también que gira diferencialmente, o como un líquido y no como un cuerpo sólido.



Considere una estrella en el plano medio del disco galáctico con la longitud galáctica l a una distancia d del Sol. Suponga que la estrella y el Sol tienen órbitas circulares alrededor del centro de la galaxia a radios de R y R_0 desde el centro galáctico y las velocidades de rotación de v y v_0 , respectivamente.



El movimiento de la estrella a lo largo de nuestra línea de visión, o de la velocidad radial y el movimiento de la estrella a través del plano del cielo, o de la velocidad transversal, como se observa a partir de la posición del Sol están a continuación:

$$V_{obs,r} = V_{star,r} - V_{sun,r} = v \cos(\alpha) - v_0 \sin(l)$$

$$V_{obs,t} = V_{star,t} - V_{sun,t} = v \sin(\alpha) - v_0 \cos(l)$$

Con la suposición de movimiento circular, la velocidad de rotación está relacionada con la velocidad angular por $v = R\Omega$ y se puede sustituir este en las expresiones de velocidad:

$$V_{obs,r} = \Omega R \cos(\alpha) - \Omega_0 R_0 \sin(l)$$

$$V_{obs,t} = \Omega R \sin(\alpha) - \Omega_0 R_0 \cos(l)$$

Podemos ver en la figura que hay las siguientes relaciones:

$$R \cos(\alpha) = R_0 \sin(l)$$

$$R \sin(\alpha) = R_0 \cos(l) - d$$

Entonces:

$$V_{obs,r} = (\Omega - \Omega_0) R_0 \sin(l)$$

$$V_{obs,t} = (\Omega - \Omega_0) R_0 \cos(l) - \Omega d$$

Usamos una serie de Taylor y suponemos que $R - R_0$ es pequeño

$$(\Omega - \Omega_0) = (R - R_0) \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R_0} + K$$

$$R - R_0 = -d \cos(l)$$

$$V_{obs,r} = -R_0 \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R_0} d \cos(l) \sin(l) = -R_0 \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R_0} d \frac{\sin(2l)}{2}$$

$$V_{obs,t} = -R_0 \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R_0} d \cos^2(l) - \Omega d = -R_0 \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R_0} d \frac{\cos(2l) + 1}{2} - \Omega d$$

$$V_{obs,t} = -R_0 \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R_0} d \frac{\cos(2l)}{2} + \left(-\frac{1}{2} R_0 \left. \frac{d\Omega}{dR} \right|_{R_0} - \Omega \right) d$$

Ademas:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} - \frac{dv_c}{dR} \right) \Big|_{R_0} = \frac{1}{2} \left(\Omega - \frac{d(\Omega R)}{dR} \right) = \frac{1}{2} \left(\Omega - R \frac{d\Omega}{dR} - \Omega \right) = -\frac{1}{2} R \frac{d\Omega}{dR}$$

$$B = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} + \frac{dv_c}{dR} \right) \Big|_{R_0} = -\frac{1}{2} \left(\Omega + \frac{d(\Omega R)}{dR} \right) = -\frac{1}{2} \left(R \frac{d\Omega}{dR} \right) - \Omega$$

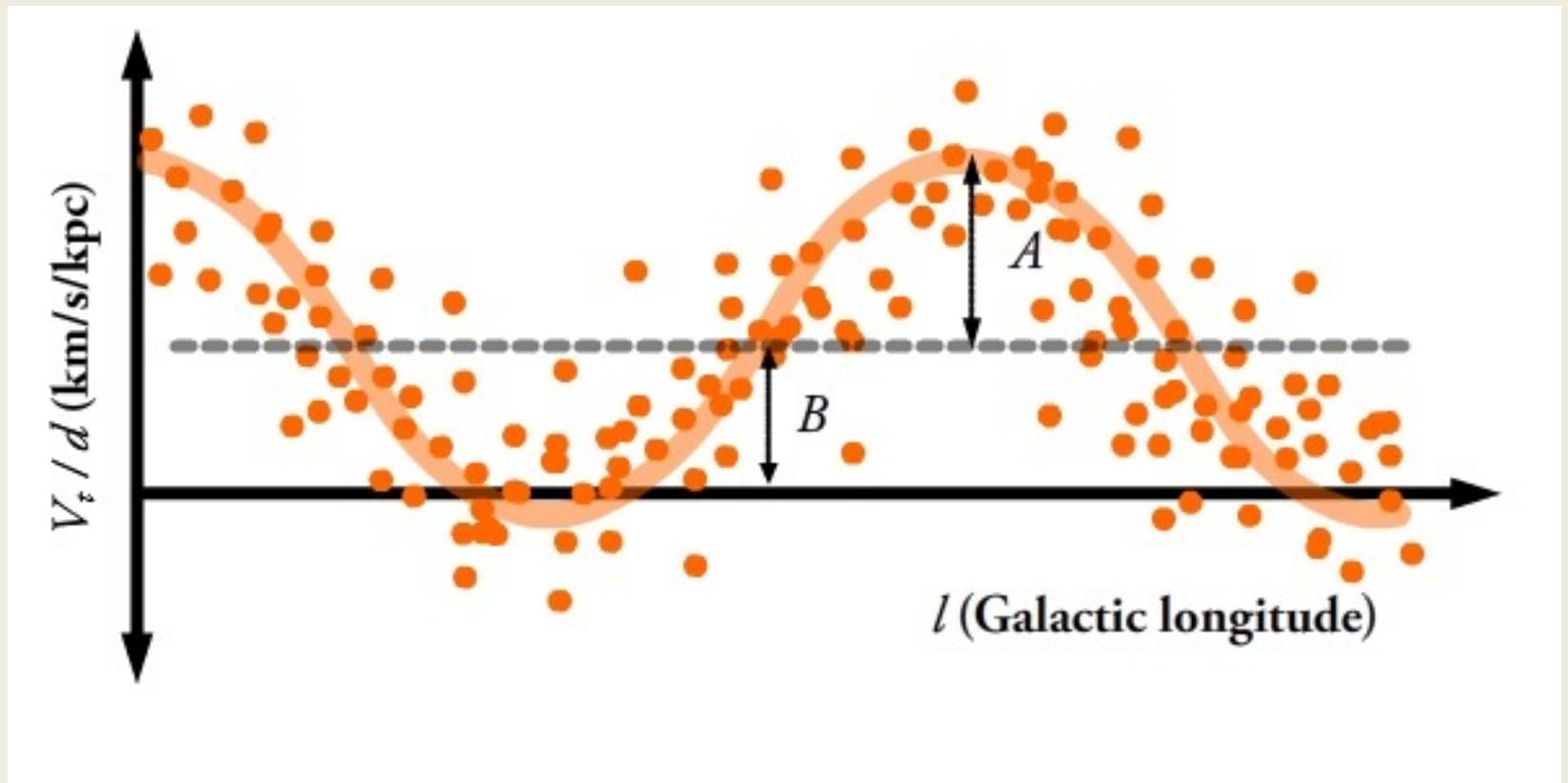
tenemos

$$V_{obs,r} = Ad \sin(2l)$$

$$V_{obs,t} = Ad \cos(2l) + Bd$$

A es la constante de Oort que describe el movimiento de cizalladura y B es la constante de Oort describir la rotación de la Galaxy.

Tal como se describe a continuación, se puede medir y de trazar estas velocidades, medidas para muchas estrellas, en contra de las longitudes galácticas de estas estrellas.



En esta etapa, las velocidades observables están relacionados con estos coeficientes y la posición de la estrella. Ahora es posible relacionar estos coeficientes a las propiedades de rotación de la galaxia. Para una estrella en una órbita circular, podemos expresar la derivada de la velocidad angular con respecto al radio en términos de la velocidad de rotación y el radio y evaluar esto en la ubicación del Sol:

$v_0 = 220 \text{ km/s}$, $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} - \frac{dv_c}{dR} \right) \Big|_{R_0} = \frac{1}{2} R \frac{d\Omega}{dR} = 14.5 \pm 1.5 \text{ km/s/kpc}$$

$$B = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} + \frac{dv_c}{dR} \right) \Big|_{R_0} = -\frac{1}{2} \left(2\Omega + R \frac{d\Omega}{dR} \right) = -12 \pm 3 \text{ km/s/kpc}$$

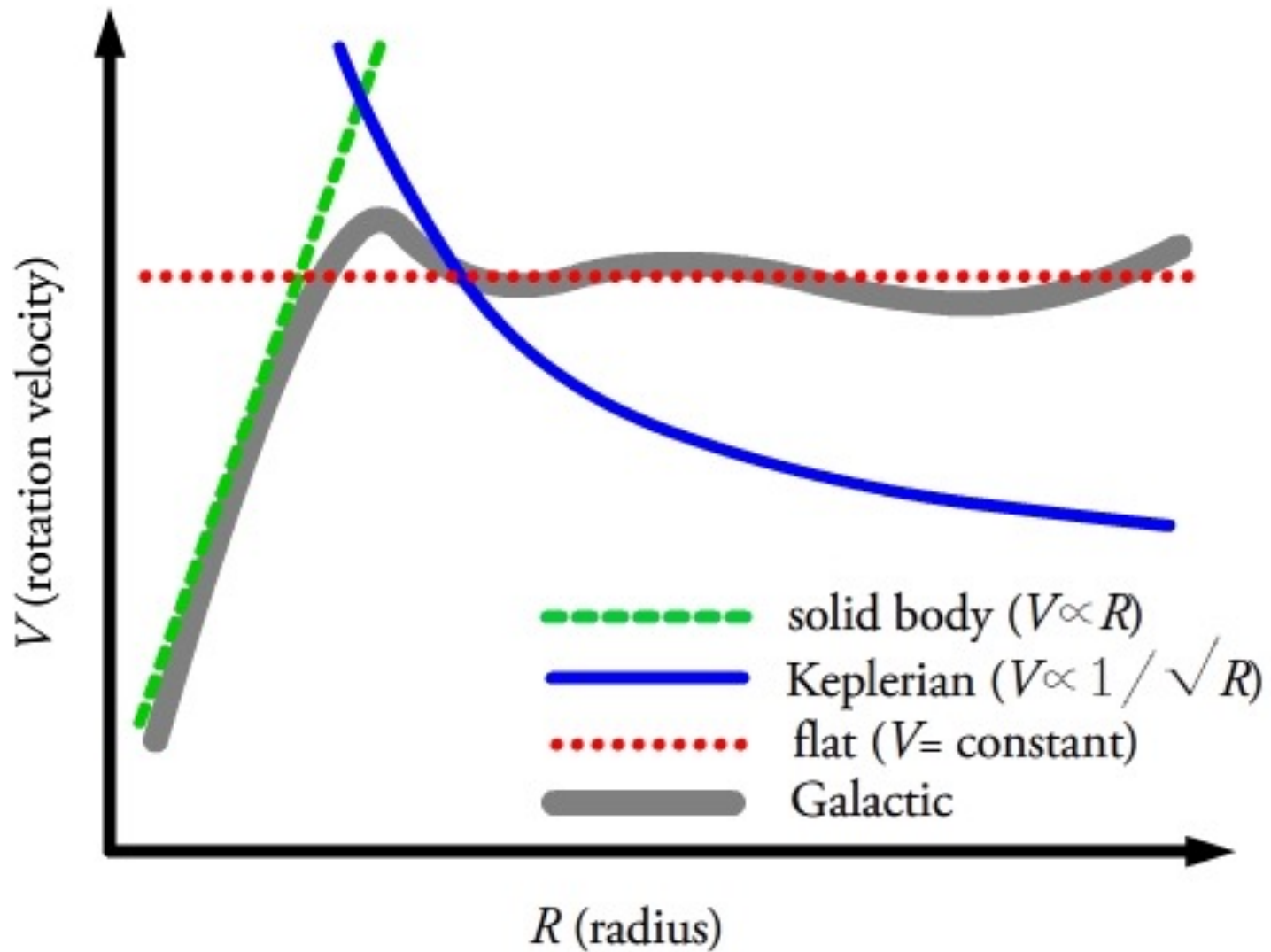
$$A - B = \frac{v_c}{R} = \Omega_0 = 26.5 \text{ km/s/kpc}$$

$$\kappa^2 = R \frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2 = 2R\Omega \frac{d\Omega}{dR} + 4\Omega^2 = 2\Omega \left(2\Omega + R \frac{d\Omega}{dR} \right)$$

$$\kappa^2 = (A - B)(-4B) = -4B\Omega_0 = 36 \pm 10 \text{ km/s/kpc}$$

$$\frac{\kappa_0}{\Omega_0} = 2\sqrt{\frac{-B}{A-B}} = 1.3 \pm 0.2$$

por cada revolución alrededor del centro galáctico el Sol hace aprox. 1,3 oscilaciones en dirección radial



- Cuerpo solido:
 - $A = 0$
 - $B = -\Omega = 26 \text{ km/s/kpc}$
- Potencial de Kepler
 - $A = 3/4 v_0/R_0 = 20 \text{ km/s/kpc}$
 - $B = -1/4 v_0/R_0 = -7 \text{ km/s/kpc}$
- Curva de rotacion constante
 - $A = 1/2 v_0/R_0 = 13.6 \text{ km/s/kpc}$
 - $B = -1/2 v_0/R_0 = -13.6 \text{ km/s/kpc}$
- → muy parecido a curva de rotacion constante

Uno de los principales usos de las constantes de Oort es calibrar la curva de rotación galáctica. Una curva relativa puede ser derivado de estudiar los movimientos de nubes de gas en la Vía Láctea, pero para calibrar las velocidades reales absolutos involucrados requiere el conocimiento de V_0 . Sabemos que:

$$V_0 = R_0(A-B)$$

R_0 se puede determinar por otros medios (por ejemplo, mediante un cuidadoso seguimiento de los movimientos de las estrellas cerca del centro de la Vía Láctea, el agujero negro supermasivo), conociendo y nos permite determinar V_0 .

También puede demostrarse que la densidad de masa se puede dar por

$$\rho_{R_0} = \frac{B^2 - A^2}{2\pi G}$$

Así que las constantes de Oort pueden decirnos algo acerca de la densidad de masa en un radio determinado en el disco. También son útiles para restringir los modelos de distribución de masa de la galaxia.

Además, en la aproximación epicicloidal para órbitas estelares casi circulares en un disco, la frecuencia epicicloidal está dada por,

$$\kappa^2 = -4B\Omega_0$$

donde Ω es la velocidad angular.

Por lo tanto, las constantes de Oort pueden decirnos mucho sobre los movimientos de la galaxia.

Toomre parametro de estabilidad local de un disco

¿Cuándo son discos autogravitante vulnerable a las inestabilidades gravitatorias locales?

Inestabilidades pueden surgir de una competencia entre:

- gravedad causando regiones más densos a colapsar
- dispersión estelar que inhibe el colapso
- momento angular que inhibe el colapso

Un disco esta estable si el parametro de Toomre esta:

$$Q = \frac{\sigma K}{3G\Sigma} > 1$$

Alar Toomre es un astrónomo estonio de nacimiento y matemático que emigró a los Estados Unidos en 1949. Él es un profesor de matemáticas aplicadas en el Instituto Tecnológico de Massachusetts. Toomre investigación se centra en la dinámica de las galaxias.



Factores que promueven la inestabilidad gravitacional (es decir, la promoción de la estructura espiral) son:

baja dispersión velocidad estelar

superficie de alta densidad de masa

bajas frecuencias epicicloidales (y / o rotación local bajo).

Vecindad solar: $\sigma \sim 30 \text{ km/s}$; $\Sigma \sim 50 M_{\text{sun}}/\text{pc}^2$;
 $\kappa \sim 36 \text{ km/s/kpc}$

estos dan $Q \sim 1,4$ y por lo que el disco de la MW es localmente estable cerca del Sol

Pseudo Black Hole Potential

potencial de un pseudo agujero negro

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r - R_s}$$

$$f(r) = -\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{GM}{(r - R_s)^2} \quad \text{y} \quad f'(r) = \frac{2GM}{(r - R_s)^3}$$

órbita circular: $\Omega_c^2 = -\frac{f(R)}{R} = \frac{GM}{R(R - R_s)^2}$

$$\kappa^2 = 3\Omega_c^2 - f'(R) = \frac{3GM}{R(R - R_s)^2} - \frac{2GM}{(R - R_s)^3}$$

órbitas estables necesitan $\kappa^2 > 0$:

$$3(R - R_s)^3 > 2R(R - R_s)^2 \quad | : (R - R_s)^2$$

$$3(R - R_s) > 2R$$

$$R > 3R_s$$

Piense en un BH de Schwarzschild donde $R_s = 2GM / c$
y la última órbita estable se encuentra en $R > 3R_s$