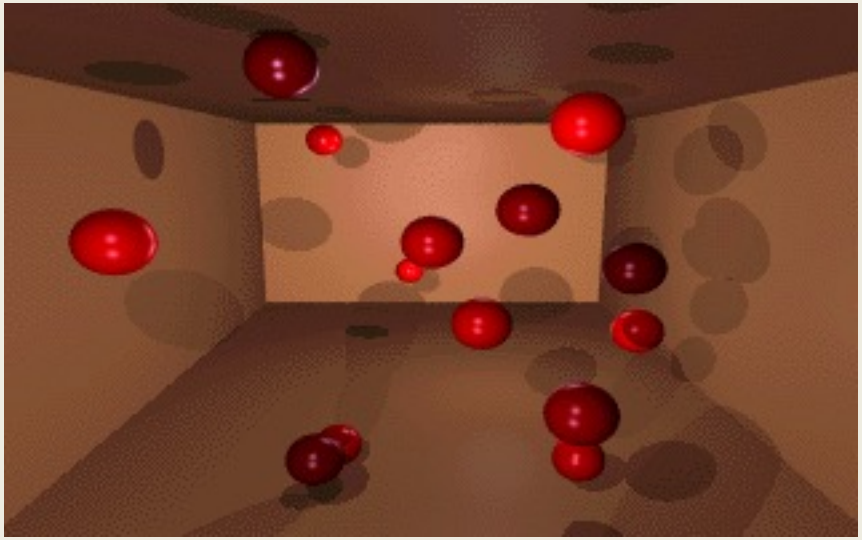
Collisionless Boltzmann Equation - Ecuación de Boltzmann sin colisiónes



Ludwig Boltzmann

Ludwig Edward Boltzmann (Viena, 20 de febrero de 1844 - Duino, Italia, 5 de septiembre de 1906) fue un físico austriaco pionero de la mecánica estadística, autor de la llamada constante de Boltzmann, concepto fundamental de la termodinámica.

Ecuación de Boltzmann sin colisiónes

Cuando miramos a las galaxias, que están más interesados en la densidad estelar y distribuciones de la velocidad que en la órbita de cada estrella solitaria (10^{11} de ellos).

Suponemos que las galaxias son "collisionless" porque tienen tiempos de relajación más de un tiempo de Hubble.

Las estrellas en las galaxias se mueven bajo la influencia del potencial promedio y no estan influidos por los encuentros con otras estrellas individuales.

Considere la posibilidad de un gran número de estrellas que se mueven en virtud de un potencial $\Phi(x,y,z,t)$

En cualquier tiempo t, una descripción completa del estado de este sistema viene dado por el número de estrellas

$$\boxed{f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)\, d^3x\, d^3v,}$$

que tienen posiciones en el elemento de volumen d^3x y velocidades en el elemento de velocidad d^3v

Then f is called distribution function or phase space density

Entonces f se llama función de distribución o la densidad del espacio de fases

Si conocemos las condiciones iniciales f(x, v, t_0) a continuación, utilizando las leyes de Newton tenemos que ser capaces de determinar f(x, v, t) para cualquier tiempo t.

Phase space coordinates (coordenadas de espacio de fase):

$$(\underline{x}, \underline{\mathrm{v}}) = \underline{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$$

$$\dot{\underline{w}} = (\dot{\underline{x}}, \dot{\underline{\mathrm{v}}}) = (\underline{\mathrm{v}}, -\nabla\Phi)$$

Continuity Equation
Ecuación de continuidad

El flujo en el espacio de fase conserva el número de estrellas:

$$\frac{df}{dt} = 0$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{\partial w_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial f}{\partial w_i}\dot{w}_i = 0$$

Ecuaciòn de Boltzmann sin colisiones

Entonces la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{6} \dot{w}_i \frac{\partial f}{\partial w_i} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{\mathrm{v}} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathrm{v}}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial\left(f\dot{w}_i\right)}{\partial w_i}=\sum_{i=1}^{6}\left(\dot{w}_i\frac{\partial f}{\partial w_i}+f\frac{\partial\dot{w}_i}{\partial w_i}\right)$$

dv_i/dx_i =0 (variables independiente)
y Φ es independiente de las velocidades

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial\dot{w}_i}{\partial w_i}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_i}+\frac{\partial\dot{\mathrm{v}}_i}{\partial \mathrm{v}_i}\right)=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial\left(f\dot{w}_i\right)}{\partial w_i}=\sum_{i=1}^{6}\dot{w}_i\frac{\partial f}{\partial w_i}$$

En coordenates: cilíndricos:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{v}_R\frac{\partial f}{\partial R}+\frac{\mathrm{v}_\varphi}{R}\frac{\partial f}{\partial \varphi}+\mathrm{v}_z\frac{\partial f}{\partial z}+\left(\frac{\mathrm{v}_\varphi{}^2}{R}-\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_R}-\frac{1}{R}\left(\mathrm{v}_R\mathrm{v}_\varphi+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_\varphi}-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_z}=0$$

En coordenates: esfericos:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{v}_r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\mathrm{v}_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}+\frac{\mathrm{v}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\\&+\left(\frac{\mathrm{v}_\theta^2+\mathrm{v}_\phi^2}{r}-\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_r}+\frac{1}{r}\left(\mathrm{v}_\phi^2\cot\theta-\mathrm{v}_r\mathrm{v}_\theta-\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_\theta}\\&-\left[\mathrm{v}_\phi\left(\mathrm{v}_r+\mathrm{v}_\theta\cot\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right]\frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_\phi}=0\end{aligned}$$

The Jeans Equations
Las ecuaciones de Jeans

Las ecuación de Boltzmann sin colisiones es una función de 7 variables y la solución de lo que es bastante difícil.

Es necesario simplificar los supuestos o tratar de tomar conocimiento mediante la adopción de los momentos de la ecuación.

Zeroth Moment
momento zero

Empezamos con la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{v}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_i} = 0$$

Ahora estamos utilizando la convención de los índices doble para dejar de lado el signo de suma. Esto significa que hay siempre una suma más de un índice que aparece doble en un plazo.

Integramos sobre d^3v:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} f d^3\mathrm{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{v}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathrm{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_i} d^3\mathrm{v} = 0$$

Definición: densidad de números (number density):

$$\nu(\underline{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} f d^3\mathrm{v}$$

$$m\nu = \rho$$

$$1.\ \text{term:} \quad \Rightarrow \quad = \frac{\partial \nu(\underline{x},t)}{\partial t}$$

$$2.\ \text{term:} \quad \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}}\left(\mathrm{v}_i f\right) = \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_i} f + \mathrm{v}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \mathrm{v}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

=0

$$\Rightarrow \quad = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{v}_i f d^3\mathrm{v}$$

$$\text{definamos:} \quad \bar{\mathrm{v}}_i = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{v}_i f d^3\mathrm{v}$$

Average velocity = velocidad media

$$\Rightarrow \quad = \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \bar{v}_i)$$

$$3.\ \text{term:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_i} d^3\mathrm{v} = f\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

fluid continuity equation
ecuación de continuidad líquido

Ecuación de momento zero:

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu \overline{\mathrm{v}}_i\right) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \overline{\mathrm{v}}_i\right) = 0}$$

First moment
primero momento

Multiplicar la ecuación de Boltzmann de v_j y luego integrar sobre d^3v (omitiendo los signos de infinito):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f\mathrm{v}_j d^3\mathrm{v} + \int \mathrm{v}_i \mathrm{v}_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathrm{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\int \mathrm{v}_j \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_i} d^3\mathrm{v} = 0$$

$1:$ ve definición de $\overline{\mathrm{v}}_i$

$2:$ definamos: $\overline{\mathrm{v}_i \mathrm{v}_j} = \frac{1}{\nu} \int \mathrm{v}_i \mathrm{v}_j f d^3\mathrm{v}$

$$\int \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathrm{v}_i \mathrm{v}_j f\right) d^3\mathrm{v} = \underbrace{\int \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_i} \mathrm{v}_j f d^3\mathrm{v}}_{=0} + \underbrace{\int \mathrm{v}_i \frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i} f d^3\mathrm{v}}_{=0} + \int \mathrm{v}_i \mathrm{v}_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathrm{v}$$

$$= 0 + 0 + \int \mathrm{v}_i \mathrm{v}_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\mathrm{v}$$

$$3: \int_{V(\mathrm{v})} \nabla (f \mathrm{v}_j) d^3\mathrm{v} = \int_{S(V(\mathrm{v}))} f \mathrm{v}_j d^2 S = 0 = \int_V \frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial \mathrm{v}_i} f d^3\mathrm{v} + \int_V \mathrm{v}_j \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_i} d^3\mathrm{v}$$

$$\int \mathrm{v}_j \frac{\partial f}{\partial \mathrm{v}_i} d^3\mathrm{v} = -\int \frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial \mathrm{v}_i} f d^3\mathrm{v} = -\int \delta_{ij} f d^3\mathrm{v} = -\delta_{ij} \nu$$

Entonces: $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nu \bar{\mathrm{v}}_j\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu \overline{\mathrm{v}_i \mathrm{v}_j}\right)+\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}=0$$

$<\mathrm{v}_j>$ veces la ecuación de continuidad:

$$\bar{\mathrm{v}}_j \frac{\partial \nu}{\partial t}+\bar{\mathrm{v}}_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \bar{\mathrm{v}}_i)=0$$

Y por que esta zero podemos anadir el negativo en la equacion ariba

$$\Rightarrow \frac{\partial \nu}{\partial t}\bar{\mathrm{v}}_j+\nu \frac{\partial \bar{\mathrm{v}}_j}{\partial t}-\frac{\partial \nu}{\partial t}\bar{\mathrm{v}}_j+\frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \overline{\mathrm{v}_i \mathrm{v}_j})-\bar{\mathrm{v}}_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \bar{\mathrm{v}}_i)+\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=0$$

$$\nu\frac{\partial \bar{\mathrm{v}}_j}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j}\right)-\bar{\mathrm{v}}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\bar{\mathrm{v}}_i\right)=-\nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}$$

Definamos:

$$\sigma_{ij}^2=\overline{\left(\mathrm{v}_i-\bar{\mathrm{v}}_i\right)\left(\mathrm{v}_j-\bar{\mathrm{v}}_j\right)}=\overline{\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j}-\bar{\mathrm{v}}_i\bar{\mathrm{v}}_j\Rightarrow\overline{\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j}=\sigma_{ij}^2+\bar{\mathrm{v}}_i\bar{\mathrm{v}}_j$$

dispersion + streaming motion

$$\nu\frac{\partial\overline{\mathrm{v}}_j}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\sigma_{ij}^2\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\overline{\mathrm{v}}_i\overline{\mathrm{v}}_j\right)-\overline{\mathrm{v}}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\overline{\mathrm{v}}_i\right)=-\nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\overline{\mathrm{v}}_i\overline{\mathrm{v}}_j\right)=\nu\overline{\mathrm{v}}_i\frac{\partial\overline{\mathrm{v}}_j}{\partial x_i}+\overline{\mathrm{v}}_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\overline{\mathrm{v}}_i\right)$$

Jeans equations

ecuaciones de Jeans

$$\boxed{\nu\frac{\partial\overline{\mathrm{v}}_j}{\partial t}+\nu\overline{\mathrm{v}}_i\frac{\partial\overline{\mathrm{v}}_j}{\partial x_i}=-\nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\sigma_{ij}^2\right)}$$

Familiar a la ecuación de Euler del flujo de fluidos:

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\rho\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}=-\rho\vec{\nabla}\Phi-\vec{\nabla}p$$

El último término de esta ecuación representa algo así como una fuerza de presión ($-\nabla p$) – así σ_{ij}^2 es un tensor que describe la presión anisotrópico.

El tensor σ_{ij}^2 tensor es simétrico y por lo tanto podemos elegir un conjunto de ejes ortogonales, de manera que σ_{ij}^2 es diagonal:

$$\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ii}^2 \delta_{ij}$$

σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} se llaman "el elipsoide de velocidades" (velocity ellipsoid)

Applicación facil

Asumimos:

- el estado de equilibrio (d/dt=0)
- Isotropia $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ii}^2 \delta_{ij} = \sigma^2$
- Ninguna rotación

Entonces:

$$\boxed{-\rho\vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}\left(\rho\sigma^2\right)}$$

Si sabemos $\rho(r) = m\nu(r)$ podemos usar la ecuación de Poisson para resolver $\Phi(r)$ entonces podemos resolver para $\sigma^2(r)$.

Podemos encontrar un modelo de auto-consistante de la estructura de velocidad interna de un cúmolo de estrellas o una galaxia.

En coordenates cilíndricos:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t}+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\nu\overline{\mathrm{v}_R}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_z}\right)=0$$

Zero'th moment eq.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_R}\right)+\frac{\partial}{\partial R}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_R^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_R\mathrm{v}_z}\right)+\nu\left(\frac{\overline{\mathrm{v}_R^2}-\overline{\mathrm{v}_\varphi^2}}{R}+\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nu\overline{\mathrm{v}}_\varphi\right)+\frac{\partial}{\partial R}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_R\mathrm{v}_\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_\varphi\mathrm{v}_z}\right)+\frac{2\nu}{R}\overline{\mathrm{v}_\varphi\mathrm{v}_R}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nu\overline{\mathrm{v}}_z\right)+\frac{\partial}{\partial R}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_R\mathrm{v}_z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_z^2}\right)+\frac{\nu}{R}\overline{\mathrm{v}_R\mathrm{v}_z}+\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$$

First moment equations

Aplicación: densidad de masa en la vecindad solar

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nu\overline{\mathrm{v}}_z\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\nu\overline{\mathrm{v}_\mathrm{R}\mathrm{v}_\mathrm{z}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_z^2}\right)+\frac{\nu}{R}\overline{\mathrm{v}_\mathrm{R}\mathrm{v}_\mathrm{z}}+\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$$

- Suponga que el estado de equilibrio (d/dt=0) y caída de la d/dR plazo, ya que es aproximadamente 10 veces menos importante que el d / dz plazo:

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_z^2}\right)=-\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad \mathrm{y} \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-4\pi G\rho$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\overline{\mathrm{v}_z^2}\right)=-4\pi G\rho$$

Si podemos determinar la densidad del número de una bien definida sub-grupo de estrellas y podemos medir su velocidad de dispersión, podemos calcular la densidad total (materia luminosa y oscura) en la vecindad solar.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial(f\dot{w}_i)}{\partial w_i}=0$$