

Jeans Theorem

Teorema de Jeans

Jeans Theorem

teorema de Jeans

Tomamos la ecuación de Boltzmann sin colisiones y asumemos un estado de equilibrio ($d/dt = 0$):

$$\underline{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = 0$$

f es la función de distribución estelar en el espacio de fase.

Cada estrella sigue una trayectoria en el espacio de fase dada por $(\underline{x}(t), \underline{v}(t))$ con:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{v}$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -\nabla\Phi$$

Definimos un integral del movimiento (**integral of motion**) como una función

$I(\underline{x}(t), \underline{v}(t))$, que es constante a lo largo de camino:

$$\frac{d}{dt} I(\underline{x}(t), \underline{v}(t)) = 0$$

por ejemplo la energía E en un potencial Φ estática:

$$E = \frac{1}{2} \underline{v}^2 + \Phi$$

$$\frac{dE}{dt} = \underline{v} \cdot \frac{d\underline{v}}{dt} + \nabla \Phi \frac{dx}{dt} = -\underline{v} \nabla \Phi + \nabla \Phi \underline{v} = 0$$

es un integral del movimiento.

Jeans Theorem

teorema de Jeans

$$\frac{dI}{dt} = \nabla I \frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{\partial I}{\partial \underline{v}} \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{v} \cdot \nabla I - \nabla \Phi \frac{\partial I}{\partial \underline{v}} = 0$$

Comparamos con:

$$\underline{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = 0$$

Cualquier solución de la ecuación de Boltzmann estacionaria que depende de la coordiantes del espacio de fases (x, v) sólo a través de integrales de movimiento en un potencial estático, y cualquier función de las integrales produce una solución de la ecuación de Boltzmann estacionaria.

El valor del Teorema de Jeans es que nos da una forma de cerrar el ciclo para la solución de la ecuación de Boltzmann. Tomando momentos nos dio una visión más clara, pero no soluciones reales. El enfoque a través de la ecuación Jeans nos dio ninguna garantía de soluciones físicas.

Application of the Jeans Theorem

La aplicación del teorema de Jeans

Queremos obtener un modelo auto-consistente.
Sabemos que

$$f(E) = f\left(\frac{1}{2}\underline{v}^2 + \Phi(\underline{x})\right)$$

es una solución de la ecuación de Boltzmann.

Suponemos que todas las estrellas tienen la misma masa m

$$\rho(\underline{x}) = m \int f d^3 v = m v(\underline{x})$$

Podemos definir f como una función de distribución de masas:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho = 4\pi G \int f d^3 v$$

Si podemos encontrar una función f que depende solo de la energía y obedece la ecuación anterior, tenemos un modelo que es auto-consistente.

En este modelo todas las estrellas obedecen las leyes de Newton en el potencial Φ que se debe a estas estrellas.

Definamos:

$$\Psi = -\Phi + \Phi_0$$

$$\mathcal{E} = -E + \Phi_0$$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2}v^2 - \Phi + \Phi_0 = \Psi - \frac{1}{2}v^2$$

Φ_0 se elige como

$$f > 0 \quad \mathcal{E} > 0$$

$$f = 0 \quad \mathcal{E} \leq 0$$

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi G \rho \quad \Psi \rightarrow \Phi_0 \quad \text{for } |x| \rightarrow \infty$$

Asumemos simetría esférica con $\Phi(r)$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho = -4\pi G \int f d^3v = -4\pi G \int_0^{\sqrt{2\Psi}} f(\mathcal{E}) 4\pi v^2 dv$$

$$\mathcal{E} = \Psi - \frac{1}{2} v^2 > 0 \longrightarrow v < \sqrt{2\Psi}$$

$$d\mathcal{E} = -v dv$$

$$\text{RHS: } -16\pi^2 G \int_0^{\sqrt{2\Psi}} f\left(\Psi - \frac{1}{2} v^2\right) v^2 dv$$

Limites: $v = 0 \longrightarrow \mathcal{E} = \Psi$; $v = \sqrt{2\Psi} \longrightarrow \mathcal{E} = 0$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -16\pi^2 G \int_0^{\Psi} f(\mathcal{E}) \sqrt{2(\Psi - \mathcal{E})} d\mathcal{E}$$

Polytropes y Plummer Sphere

Asumemos:

$$f = \begin{cases} F \mathcal{E}^{n-\frac{3}{2}} & \mathcal{E} > 0 \\ 0 & \mathcal{E} \leq 0 \end{cases}$$

$$F = \text{const.}$$

$$\text{y } \mathcal{E} = \Psi - \frac{1}{2}v^2$$

$$\rho(r) = 4\pi \int_0^{\infty} f\left(\Psi(r) - \frac{1}{2}v^2\right) v^2 dv = 4\pi F \int_0^{\sqrt{2\Psi}} \left(\Psi(r) - \frac{1}{2}v^2\right)^{n-\frac{3}{2}} v^2 dv$$

sustituimos:

$$v^2 = 2\Psi \cos^2 \theta \rightarrow v = \sqrt{2\Psi} \cos \theta \Rightarrow dv = -\sqrt{2\Psi} \sin \theta d\theta$$

$$v dv = -2\Psi \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$v^2 dv = -(2\Psi)^{3/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \Psi \cos^2 \theta$$

Limites:

$$v = 0 \rightarrow \theta = \pi / 2 \quad v = \sqrt{2\Psi} \rightarrow \theta = 0$$

$$\rho(r) = -4\pi F \int_{\pi/2}^0 \left(\Psi - \Psi \cos^2 \theta \right)^{n-3/2} (2\Psi)^{3/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$\rho(r) = 2^{7/2} \pi F \int_0^{\pi/2} \left(\Psi \sin^2 \theta \right)^{n-3/2} \Psi^{3/2} (1 - \sin^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$\rho(r) = 2^{7/2} \pi F \int_0^{\pi/2} \Psi^n \sin^{2n-2} \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta$$

$$\rho(r) = 2^{7/2} \pi F \Psi^n \left[\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta \right]$$

$$\rho(r) = C_n \Psi^n$$

Example models by polytropic index

- Neutron stars are well modeled by polytropes with index about in the range between $n=0.5$ and $n=1$.
- A polytrope with index $n=1.5$ is a good model for degenerate star cores (like those of red giants), for white dwarfs, brown dwarfs, giant gaseous planets (like Jupiter), or even for rocky planets.
- Main sequence stars like our Sun are usually modeled by a polytrope with index $n=3$, corresponding to the Eddington standard model of stellar structure.
- A polytrope with index $n=5$ has an infinite radius. It corresponds to the simplest plausible model of a self-consistent stellar system, first studied by A. Schuster in 1883.
- A polytrope with index ∞ corresponds to what is called isothermal sphere, that is an isothermal self-gravitating sphere of gas, whose structure is identical with the structure of a collisionless system of stars like a globular cluster.

$$\rho(r) = C_n \Psi^n \quad \text{con} \quad \Psi(r) > 0 \quad \text{y}$$

$$C_n = \frac{(2\pi)^{3/2} \Gamma(n - 1/2) F}{n!}$$

entonces $n > 1/2$ por que $(n-3/2)! = \Gamma(n-1/2)$ y $\Gamma(x)$ solo es definido por $x > 0$.

Insertamos (252) en la ecuación de Poisson:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G C_n \Psi^n$$

Rescalar con $s = r/b$ y con $b = (4\pi G \Psi_0^{n-1} C_n)^{-1/2}$

$$\psi = \Psi/\Psi_0 \quad \Psi_0 = \Psi(0)$$

Lane-Emden equation

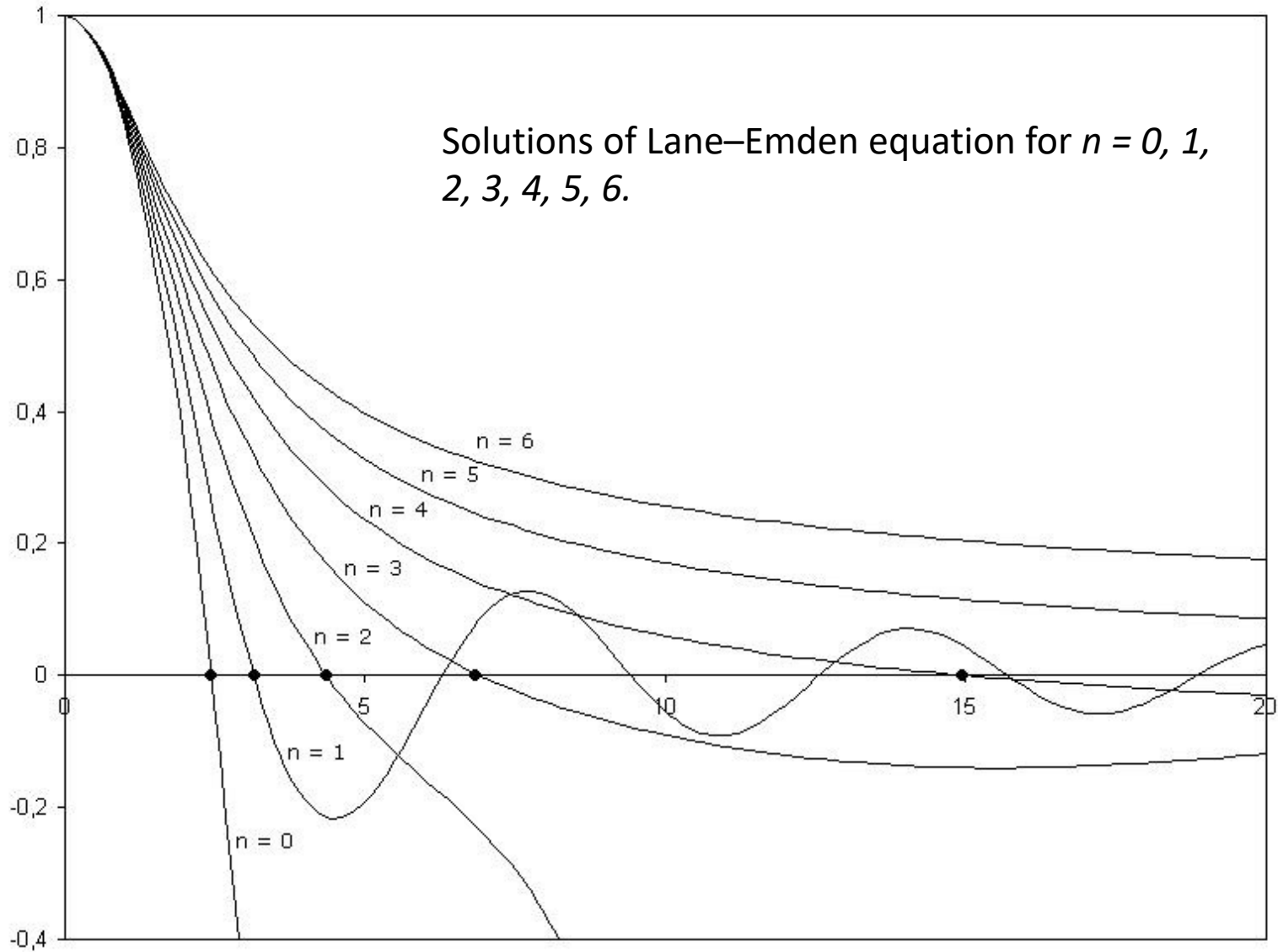
Ecuación de Lane-Emden

In astrophysics, the Lane–Emden equation is Poisson's equation for the gravitational potential of a self-gravitating, spherically symmetric polytropic fluid. It is named after the astrophysicists Jonathan Homer Lane and Robert Emden. Jonathan Homer Lane (August 9, 1819, Geneseo, New York – May 3, 1880, Washington D.C.) was an American astrophysicist and inventor. Jacob Robert Emden (March 4, 1862–October 8, 1940) was a Swiss astrophysicist and meteorologist. He was born in St. Gallen, Switzerland. He was the uncle of the German American astrophysicist Martin Schwarzschild. Jacob Robert Emden died in Zürich in 1940.

$$\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{d\psi}{ds} \right) = \begin{cases} -\psi^n & \psi > 0 \\ 0 & \psi \leq 0 \end{cases}$$

- Las condiciones de contorno: $s=0 \rightarrow$
- $\psi=1; d\psi/ds=0$

Solutions of Lane–Emden equation for $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.



Aquí hemos elegido un determinado $f(\mathcal{E})$ y entonces se obtiene la ecuación diferencial para resolver ψ y por lo tanto ρ .

Considera: $\psi = \left(1 + \frac{1}{3}s^2\right)^{-1/2}$

$$\frac{d}{ds} \left(1 + \frac{1}{3}s^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{3}s \left(1 + \frac{1}{3}s^2\right)^{-3/2} \quad | \cdot s^2$$

$$\frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{3}s^3 \left(1 + \frac{1}{3}s^2\right)^{-3/2} \right) = -s^2 \left(1 + \frac{1}{3}s^2\right)^{-3/2} + \frac{1}{3}s^4 \left(1 + \frac{1}{3}s^2\right)^{-5/2} \quad | \div s^2$$

$$-\left(1 + \frac{1}{3}s^2\right) \left(1 + \frac{1}{3}s^2\right)^{-5/2} + \frac{1}{3}s^2 \left(1 + \frac{1}{3}s^2\right)^{-5/2} = \left(1 + \frac{1}{3}s^2\right)^{-5/2} = -\psi^5$$

Entonces tenemos la solución n=5

$$\Rightarrow \rho = C_5 \Psi^5 = \frac{C_5 \Psi_0^5}{\left(1 + \frac{1}{3}s^2\right)^{5/2}}$$

Plummer law = ley de Plummer

con

$$M_\infty = \frac{\sqrt{3}\Psi_0 b}{G} \quad y \quad R_{pl} = \sqrt{3}b$$

Tenemos:

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi R_{pl}^3} \left(1 + \frac{r^2}{R_{pl}^2} \right)^{-5/2}$$

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{R_{pl}} \left(1 + \frac{r^2}{R_{pl}^2} \right)^{-1/2}$$

$$f(\underline{x}, \underline{v}) = \frac{24\sqrt{2}}{7\pi^3} \frac{R_{pl}^2}{G^5 M^4} \left| \frac{1}{2} v^2 + \Phi(r) \right|^{7/2}$$

Isothermal Sphere

Esfera Isotérmica

- Es un polytrope con índice n
- En el limite $n \rightarrow \infty$
- $\sigma^2(r) = \sigma^2 = \text{const.}$

La ecuación de un gas isotérmico:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{k_B T}{m} \frac{d\rho}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2} \Big| \cdot \frac{r^2 m}{\rho k_B T}$$
$$r^2 \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} = -\frac{GM(r)m}{k_B T} \Big| \frac{d}{dr}$$
$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{Gm}{k_B T} \frac{dM}{dr}$$

usamos:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{Gm}{k_B T} 4\pi r^2 \rho$$

Asumimos:

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}\right) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - \frac{1}{2}v^2}{\sigma^2}\right)$$

Entonces:

$$\rho(r) = \int f(\mathcal{E}) d^3v = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi}{\sigma^2}\right) \int \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) d^3v$$

$$\rho(r) = \rho_1 \exp\left(\frac{\Psi}{\sigma^2}\right)$$

Usando:

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{-3/2}$$

$$\rightarrow \Psi = \sigma^2 (\ln \rho - \ln \rho_1)$$

La ecuación de Poisson entonces lee

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho$$

$$\frac{\sigma^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 \rho$$

Comparar

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{k_B T}{m}$$

Asumimos: $\rho(r) = C r^{-b}$

$$\ln \rho = \ln C - b \ln r$$

$$\frac{d \ln \rho}{dr} = -\frac{b}{r} \quad | \text{ in (260)}$$

$$b = \frac{4\pi G}{\sigma^2} r^{2-b} C$$

$$\Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow C = \frac{\sigma^2}{2\pi G}$$

$$\Rightarrow \rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2}$$

Con $F(v) = N \exp(-v^2/2\sigma^2)$ que es una distribución de velocidades de Maxwell (**Maxwellian velocity distribution**) tenemos una

esfera isotérmica singular

singular isothermal sphere

$\rho \rightarrow \infty$ por $r \rightarrow 0$ y $M \rightarrow \infty$ por $r \rightarrow 0$

$$\bar{v}^2 = \frac{\int f(E) v^2 4\pi v^2 dv}{\int f(E) 4\pi v^2 dv} = \frac{\int \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) v^4 dv}{\int \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) v^2 dv} = 3\sigma^2$$

usando: $\int x^4 \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{3}{2} \alpha^{-5/2}$

$\Rightarrow \sigma$ es la velocidad de dispersión unidimensional

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} = \frac{d}{dr} r \frac{d \ln \rho}{d \ln r} = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 \rho \quad | \quad \int dr$$

$$r \frac{d \ln \rho}{d \ln r} = -\frac{4\pi G}{\sigma^2} \int \rho r^2 dr \quad | \quad M(r) = 4\pi \int \rho r^2 dr$$

$$-\sigma^2 \frac{d \ln \rho}{d \ln r} = \frac{GM(r)}{r} = v_c^2(r)$$

For large r we have

$$\frac{d \ln \rho}{d \ln r} \rightarrow -2$$

$$v_c^2 = 2\sigma^2$$

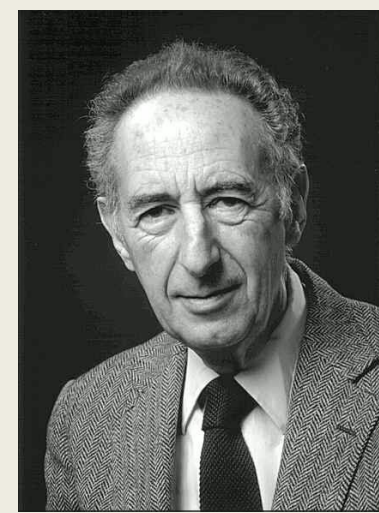
Hemos visto que una esfera isotérmica tiene una velocidad circular constante en cada radio.

Pero esta esfera tiene una densidad infinita en el centro.

Por lo tanto, introducimos un radio de escala y una densidad central ...

Definamos:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \tilde{r} = \frac{r}{r_0} \quad r_0 = \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_0}}$$



Radio de King

ρ_0 : desidad central

r_0 : radio de King o radio de núcleo o radio de masa media
(King radius or core radius or half-mass radius)

Para r larga este perfil de King (King profile) es como una esfera isotérmica singular.

$$\frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r}^2 \frac{d}{d\tilde{r}} \ln \tilde{\rho} \right) = -9 \tilde{\rho}$$

usamos: $dr = r_0 d\tilde{r} \quad r = \tilde{r} r_0$

condición de frontera: $\tilde{\rho}(0) = 1 \quad \left. \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=0} = 0$

con estas condiciones podemos resolver la ecuación numéricamente