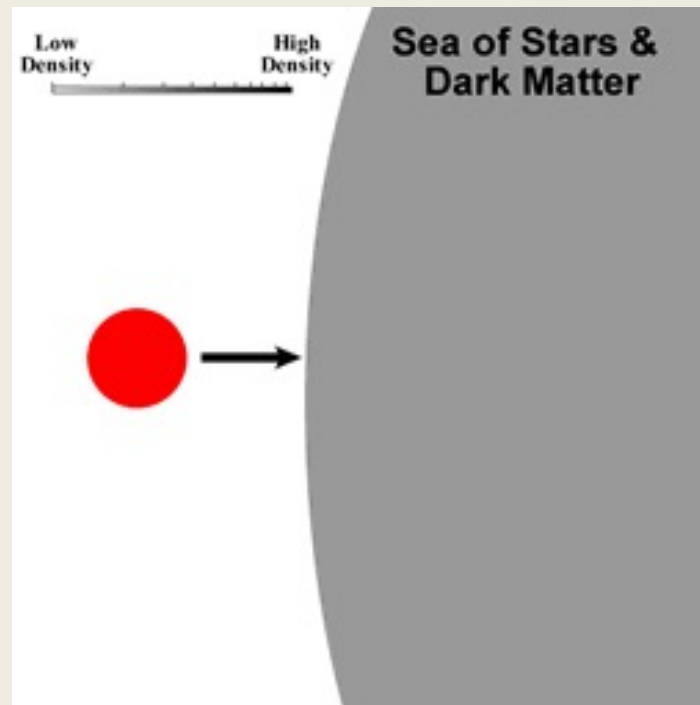


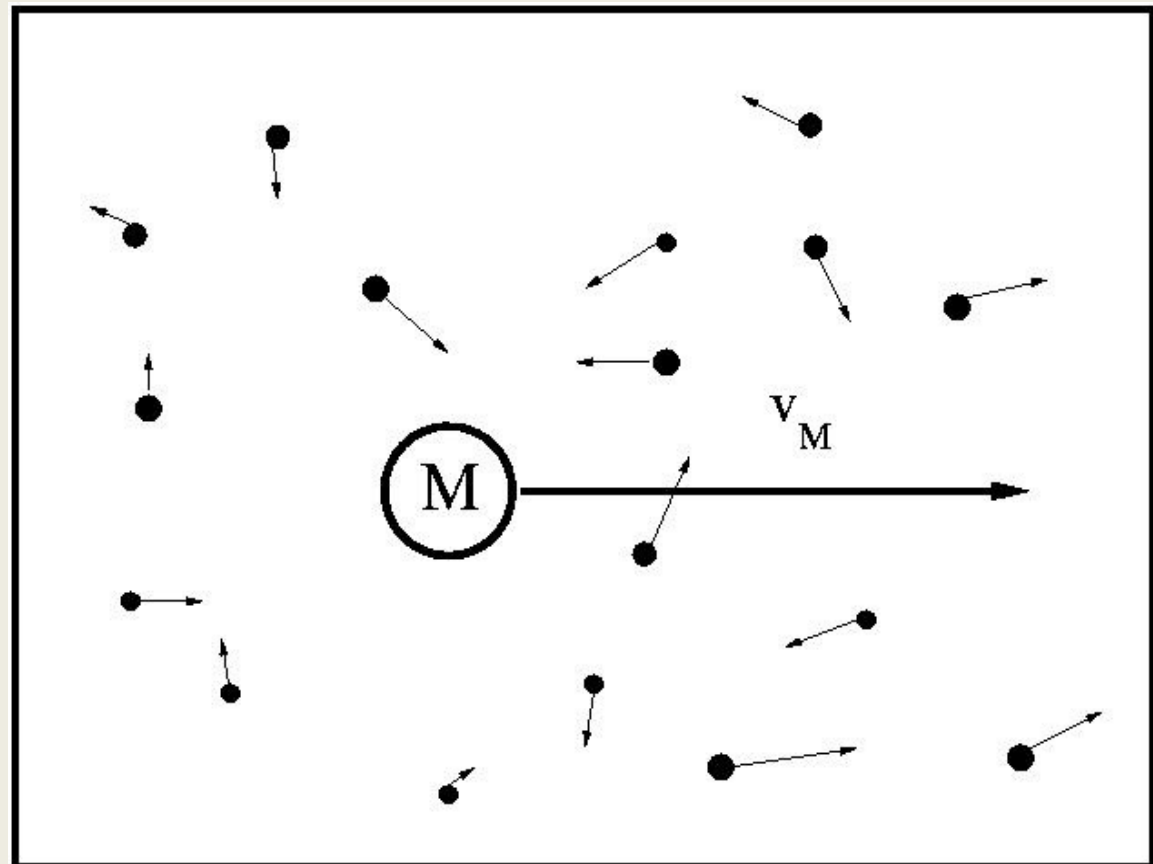
Dynamical Friction

fricción dinámica

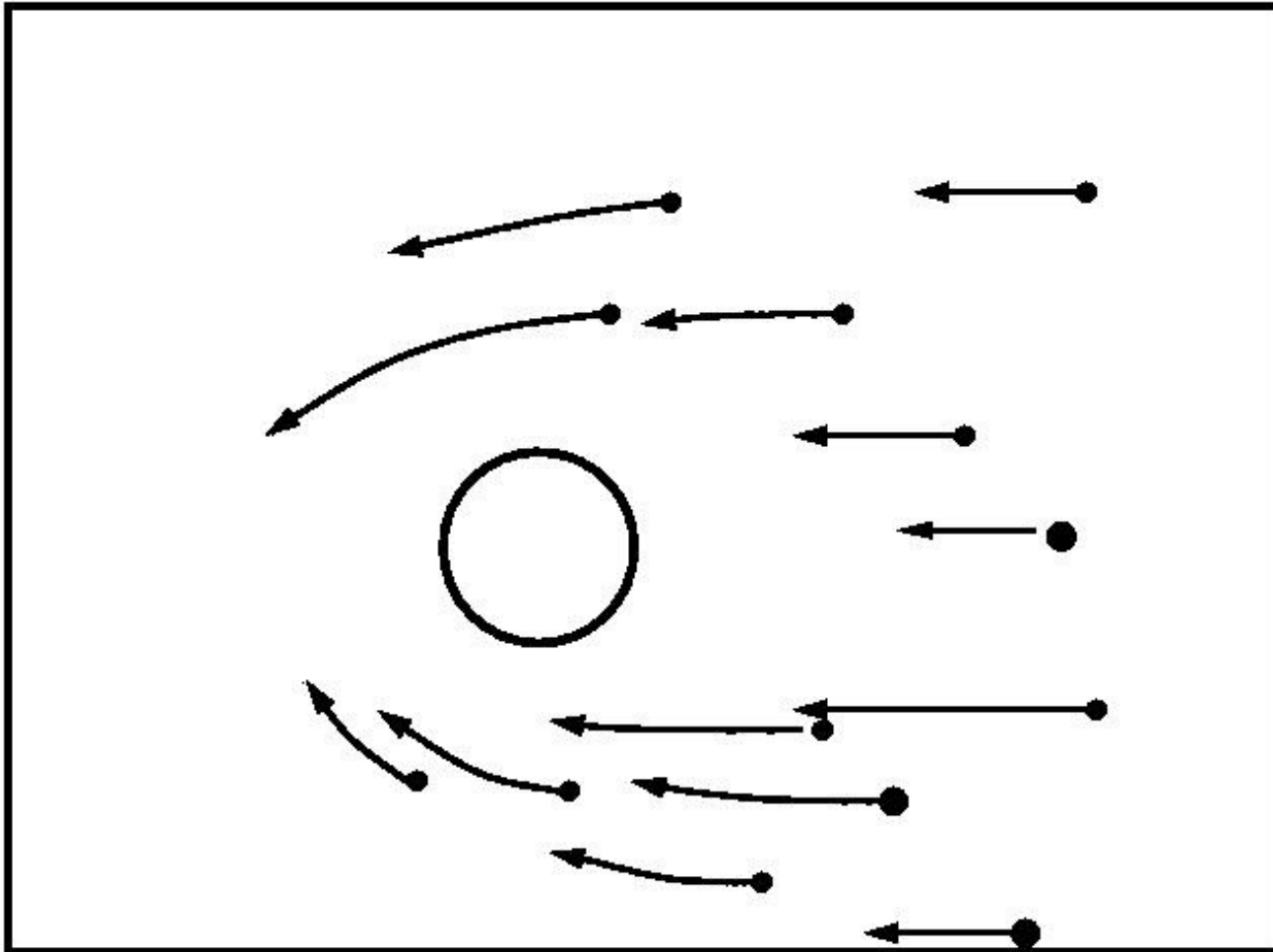


Qué es Dynamical Friction ?

Esta la **desaceleración** de un objeto masivo en movimiento a través de un otro objeto extenso ("mar de estrellas") debido a la interacción gravitacional con las estrellas que rodean.

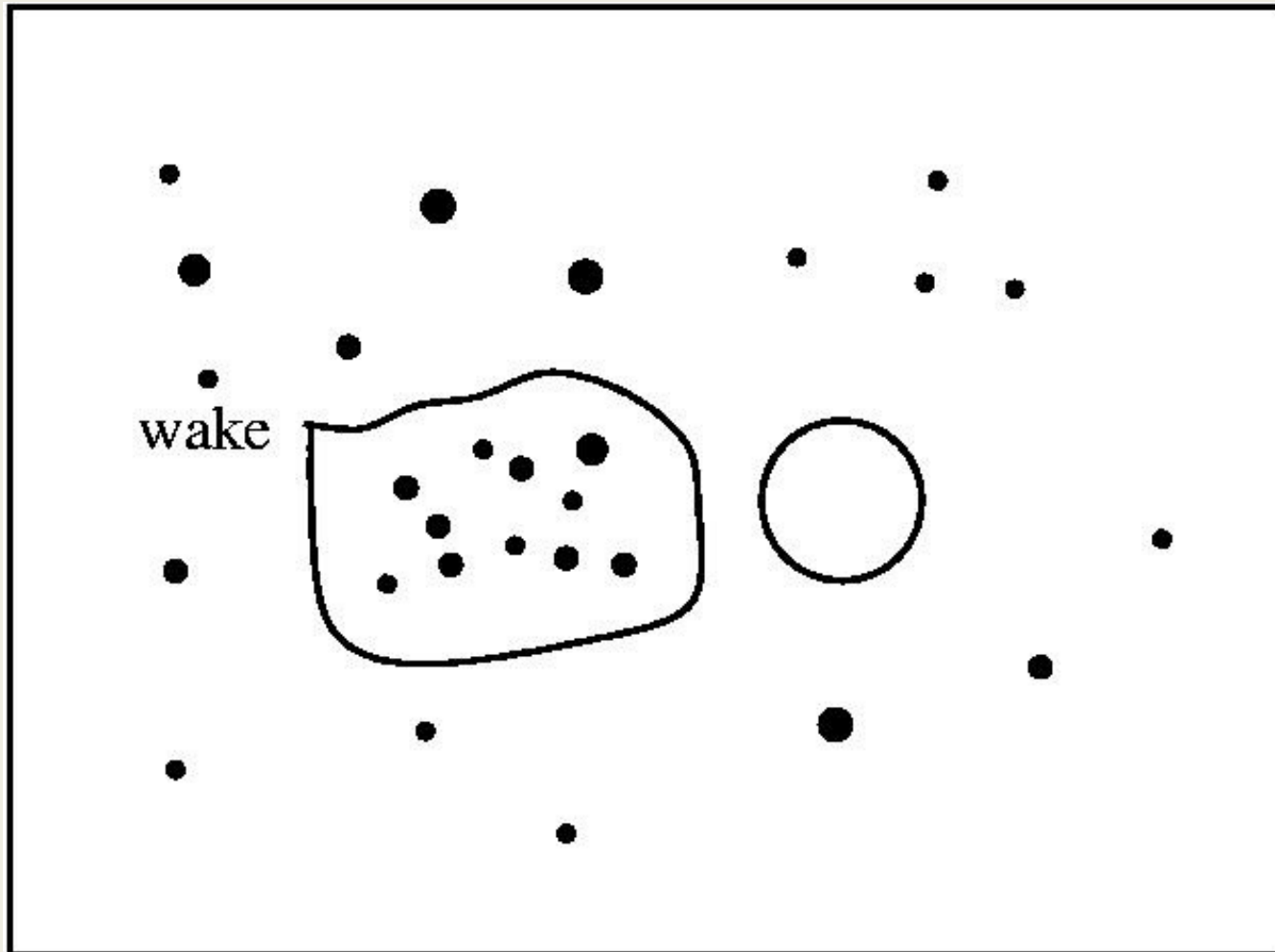


las estrellas se desvían debido a la gravedad del objeto masivo (BH, cúmulo estelar, galaxia enana, ...)



En el "mar de estrellas" existen la misma cantidad de estrellas "arriba" como "abajo" que conseguir desviado por el objeto en movimiento ==> ningún efecto neto perpendicular a la dirección de la velocidad. PERO: Debido a la velocidad del objeto más estrellas de 'delante' del objeto de interactuar con él que de 'detrás de' ==> Esto conduce a una disminución neta de la velocidad del objeto.

Mientras se mueve a través de la de las estrellas el objeto deja una estela (**wake**) detrás.



¿Dónde se produce fricción dinámica?

Siempre que un objeto se mueve dentro de otro objeto:

- Cúmulos estelares en el disco
- Las galaxias enanas y los cúmulos globulares en el Halo
- BH en el centro de la Galaxia
- Estrellas masivas en el interior un cúmulo de estrella...

¿Qué efecto tiene la fricción dinámica?

- Reducir la velocidad en el sentido de una fricción
- La disminución de la órbita y, finalmente, en espiral hacia el centro
- “Circularizing” de las órbitas

¿Podemos cuantificar la fricción dinámica?



- Respuesta: ¡SÍ!
- **Fórmula de Chandrasekhar (1943):**

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -\frac{4\pi \ln \Lambda G^2 \rho M}{v^3} \left(\operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} \exp(-X^2) \right) \underline{v} \quad (199)$$

$$\Lambda = \frac{bv^2}{G(M+m)} \quad \text{Coulomb logarithm} \quad (200)$$

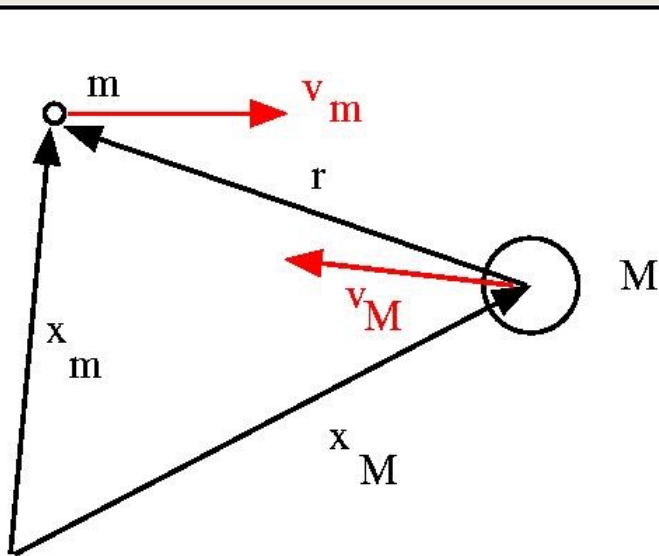
$$X = \frac{v}{\sigma}$$

Subrahmanyan Chandrasekhar (19 de octubre de 1910 – † 21 de agosto de 1995) fue un físico, astrofísico y matemático hindú. Nació en Lahore, perteneciente a la India Británica entonces, actualmente a Pakistán. Ganó el Premio Nobel de Física en 1983 compartido con William Fowler por sus estudios sobre los procesos importantes en la estructura y evolución estelares.

En primer lugar resolver el efecto de un solo cuerpo, y luego añadir los efectos de los encuentros sucesivos.

Deje que el radio vector entre los dos cuerpos esta $\underline{r} = \underline{x}_m - \underline{x}_M$ y \underline{V} la velocidad relativa

conservación del impulso:



$$\Delta \underline{V} = \Delta \underline{v}_m - \Delta \underline{v}_M$$

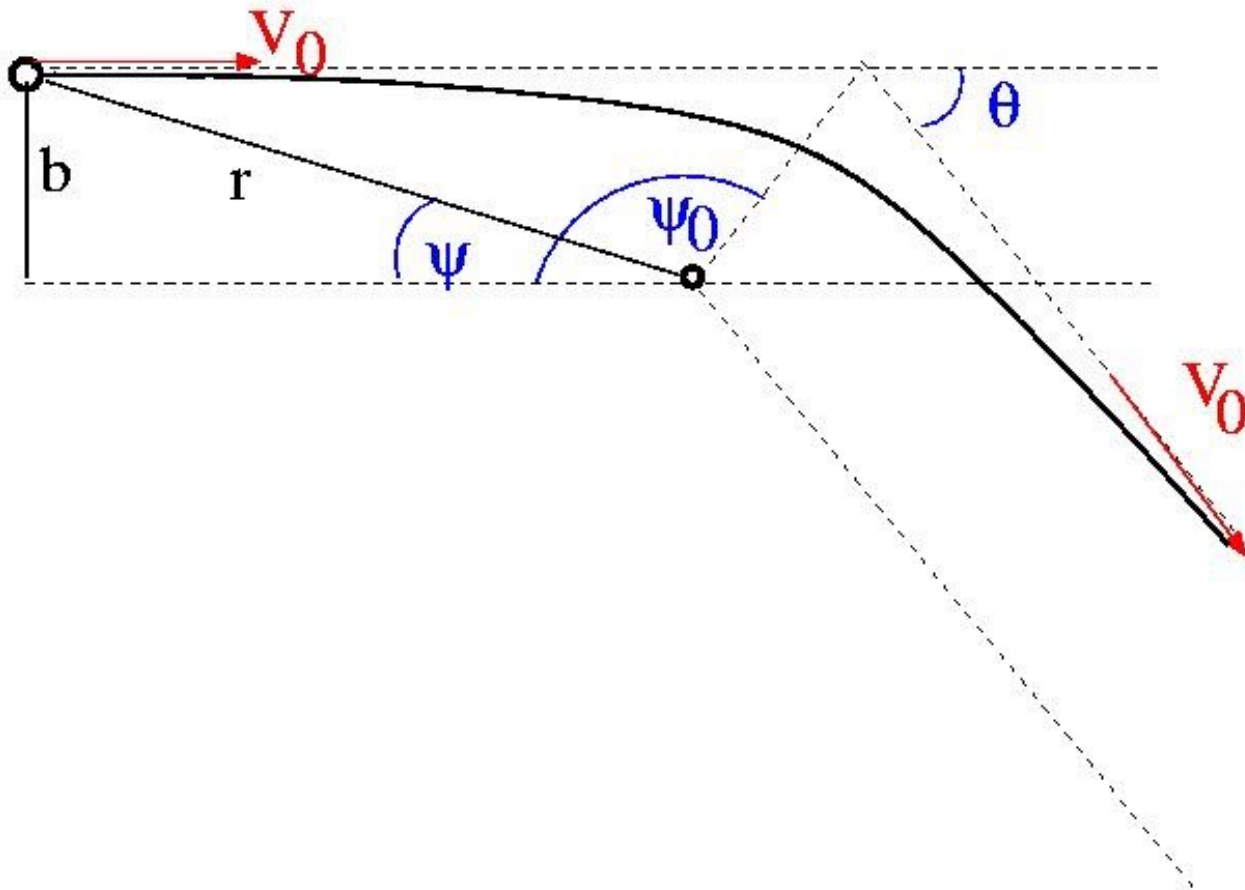
$$m \Delta \underline{v}_m + M \Delta \underline{v}_M = 0$$

$$\Delta \underline{v}_M = - \left(\frac{m}{M + m} \right) \Delta \underline{V} \quad (201)$$

$$\left(\frac{mM}{m + M} \right) \ddot{r} = - \frac{GmM}{r^2} \hat{e}_r$$

Esta es la ecuación de movimiento de una partícula reducida (**reduced particle**) en un potencial de Kepler de masa $m + M$.

b es el parámetro de impacto (**impact parameter**) del encuentro (separación perpendicular en el infinito) y V_0 la velocidad relativa (**relative velocity**) en el infinito.



Entonces el momento angular conservado es

$$L = bV_0.$$

La **solución general** de un **potencial de Kepler** dice lo siguiente:

$$\frac{1}{r} = C \cos(\Psi - \Psi_0) + \frac{G(M + m)}{b^2 V_0^2} \quad (202)$$

Ψ_0 y C se determina a partir de las condiciones iniciales

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \dot{r} \quad \frac{d}{dt} \left(C \cos(\Psi - \Psi_0) + \frac{G(m + M)}{b^2 V_0^2} \right) = -C \dot{\Psi} \sin(\Psi - \Psi_0)$$

Ahora podemos diferenciar (202) con respecto al tiempo:

$$\frac{dr}{dt} = Cr^2\dot{\Psi} \sin(\Psi - \Psi_0) = CbV_0 \sin(\Psi - \Psi_0) \quad (203)$$

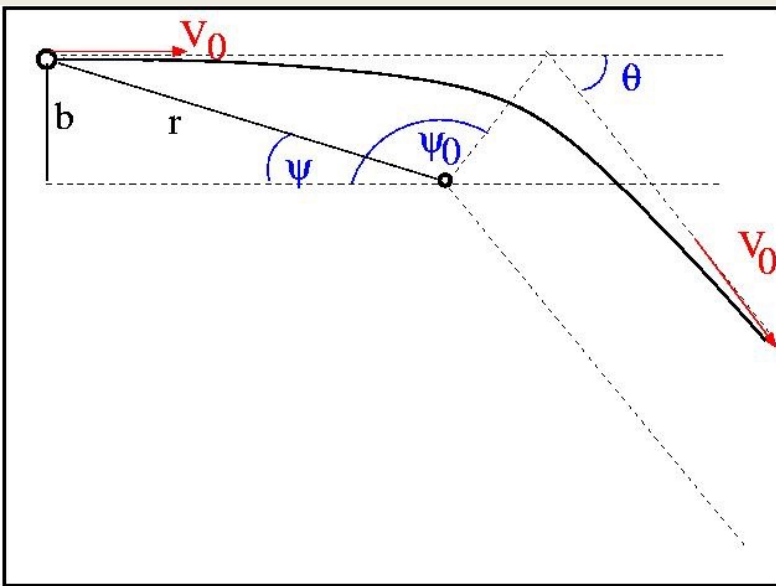
- Nota: $L = bV_0 = r^2 d\Psi/dt$.
- Como $t \Rightarrow -\infty$ ecuaciones (202) y (203) lean:

$$-V_0 = CbV_0 \sin(-\Psi_0)$$

$$0 = C \cos(\Psi_0) + \frac{G(M+m)}{b^2 V_0^2}$$

Despues la eliminación de C tenemos:

$$\tan(\Psi_0) = -\frac{bV_0^2}{G(M+m)} \quad (204)$$



El punto de máximo acercamiento se alcanza cuando $\Psi = \Psi_0$.

La órbita es simétrica con respecto a este punto, por lo que el ángulo de desviación es $\theta = 2\Psi_0 - \pi$.

Conservación de la energía requiere que la velocidad relativa después de la encuentro es igual a la velocidad inicial V_0 .

Entonces los componentes ΔV_{para} y Δv_{perp} están dadas por

$$|\Delta v_{\text{perp}}| = V_0 \sin \theta = V_0 |\sin 2\Psi_0| = \frac{2V_0 |\tan \Psi_0|}{1 + \tan^2 \Psi_0} = \frac{2bV_0^3}{G(M+m)} \left[1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(M+m)^2} \right]^{-1}$$

$$|\Delta v_{\text{para}}| = V_0 (1 - \cos \theta) = V_0 (1 + \cos 2\Psi) = \frac{2V_0}{1 + \tan^2 2\Psi} = 2V_0 \left[1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(M+m)^2} \right]^{-1}$$

Usando (201):

$$|\Delta v_{M,\text{perp}}| = \frac{2mbV_0^3}{G(M+m)^2} \left[1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(M+m)^2} \right]^{-1}$$

$$|\Delta v_{M,\text{para}}| = \frac{2mV_0}{M+m} \left[1 + \frac{b^2V_0^4}{G^2(M+m)^2} \right]^{-1} \quad (205)$$

Ahora imaginemos que la masa M viaja a través de un mar infinito de estrellas.

Invocamos a la 'estafa Jeans' ('**Jeans swindle**') y descuidamos el potencial gravitatoria de estas estrellas para que su movimiento es determinado exclusivamente por la masa M .

En esta aproximación ΔV_{perp} suma a cero.

Pero los cambios de ΔV_{para} son paralelos a V_0 y forman una no-cero contribución.

Sir James Hopwood Jeans (11 de septiembre de 1877, Ormskirk, Lancashire – 16 de septiembre de 1946, Dorking, Surrey) fue un físico, astrónomo y matemático británico.



Por lo tanto, si la densidad del espacio de fases de las estrellas es $f(\mathbf{v})$, entonces la tasa con la que M se encuentra con estrellas con velocidades en el elemento de velocidad $d^3\mathbf{v}_m$ y en los parámetros de impacto entre b y $b + db$ es

$$2\pi b db \cdot V_0 \cdot f(\mathbf{v}_m) d^3\mathbf{v}_m$$

(206)

La tasa neta de cambio de v_M debido a este encuentro es

$$\frac{dv_M}{dt} \Big|_{v_m} = V_0 f(v_m) d^3 v_m \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{2mV_0}{M+m} \left[1 + \frac{b^2 V_0^4}{G^2 (M+m)^2} \right]^{-1} 2\pi b db$$

(207)

donde b_{\max} es el parámetro de mayor impacto a considerar.

Integramos (207) sobre b :

$$\frac{dV_M}{dt} \Big|_{v_m} = 2\pi \ln(1 + \Lambda^2) G^2 m(M + m) f(v_m) d^3 v_m \frac{V_m - V_M}{|V_m - V_M|^3} \quad (208)$$

$$\Lambda = \frac{b_{\max} V_0^2}{G(M + m)}$$

$\ln \Lambda$ se llama
Coulomb logarithm.

Debido a que Λ es generalmente muy alta que aplicamos

$$\frac{1}{2} \ln(1 + \Lambda^2) \approx \ln \Lambda$$

Si suponemos ahora que $f(v)$ es una **distribución de Maxwell** (Maxwell distribution) finalmente obtenemos:

$$\frac{d\underline{v}_M}{dt} = -\frac{4\pi \ln \Lambda G^2 \rho M}{v^3} \left(\operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} \exp(-X^2) \right) \underline{v}_M \quad (209)$$

donde ρ es la densidad de estrellas alrededor de M y $X = v_m / \sqrt{2} \sigma$ con la dispersión de la velocidad σ de la distribución de Maxwell ($M \gg m$).

Aplicaciones útiles:

Caída de una órbita de un cúmulo globular

- Suponiendo una esfera isotérmica por la galaxia y una órbita circular por el cúmulo globular
- Entonces, el tiempo en que el cúmulo necesita por espiral hacia el centro es

$$t_{fric} = \frac{1.17 r_i^2 v_c}{\ln \Lambda G M} = \frac{2.64 \cdot 10^{11}}{\ln \Lambda} \left(\frac{r_i}{2 \text{kpc}} \right)^2 \left(\frac{v_c}{250 \text{km/s}} \right) \left(\frac{10^6 M_\odot}{M} \right) \text{yr}$$

(210)

Aplicaciones útiles:

Caída de un BH masivo en el bulbo de la MW:

- Suponga un perfil de masa del bulbo de una ley de potencia $M(r) = A r^\alpha$

$$r(t) = R_0 \left[1 - \frac{\alpha(\alpha + 3)}{\alpha + 1} \sqrt{\frac{G}{AR_0^{\alpha+3}}} \chi M_{BH} \ln \Lambda t \right]^{2/(3+\alpha)} \quad (211)$$

$$\chi = \operatorname{erf}(X) - \frac{2X}{\sqrt{\pi}} \exp(-X^2)$$

$$X = \frac{v_{BH}}{\sqrt{2}\sigma}$$

¿Funciona la fórmula en la realidad?

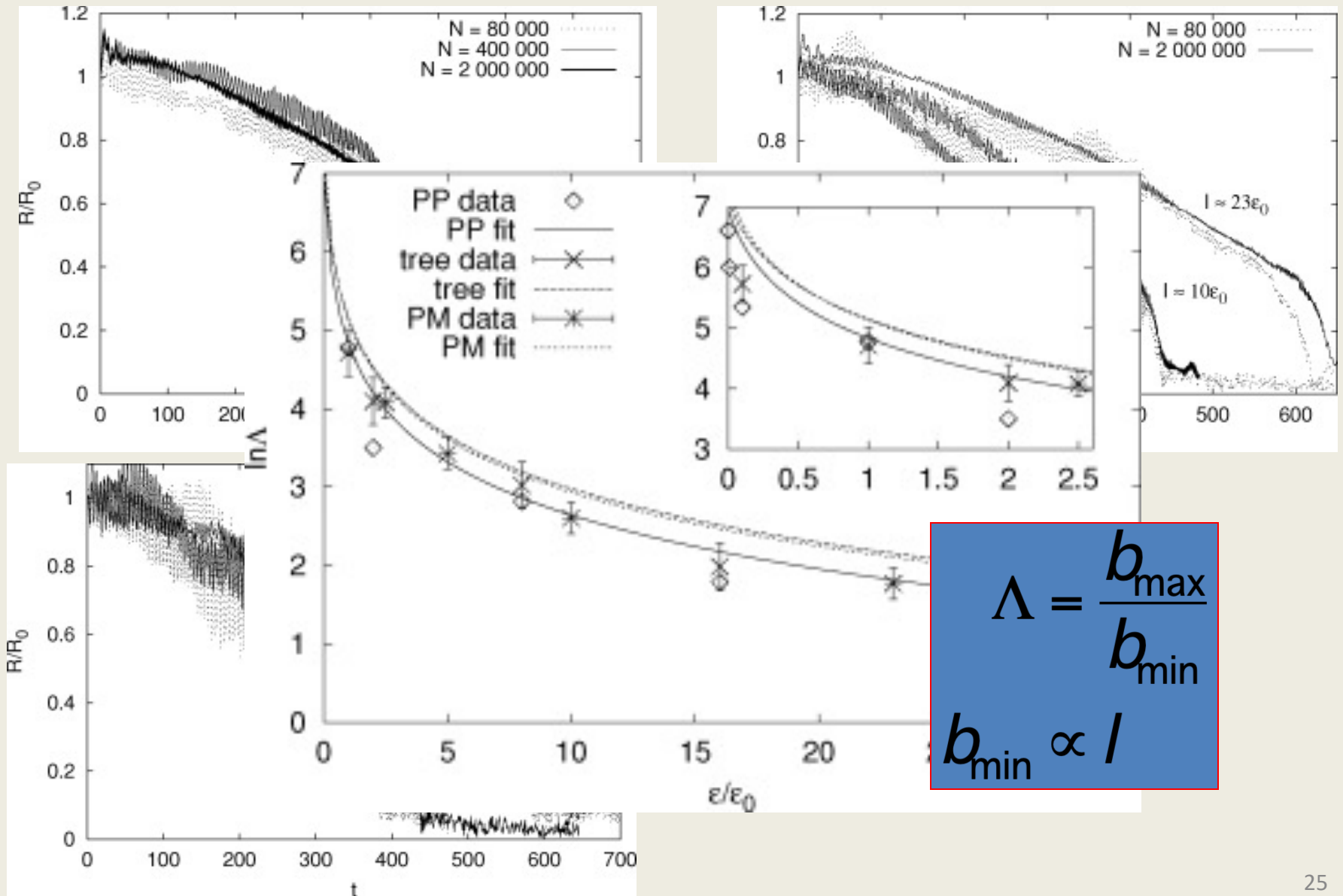
Se podría argumentar que las hipótesis formuladas para obtener la fórmula Chandrasekhar no se aplican a entornos reales astronómicas.

PERO: A pesar de que no hay un mar infinito de estrellas con una densidad constante, sino más bien sistemas finitos con cambios de densidad, la fórmula de Chandrasekhar ha demostrado ser muy útil.

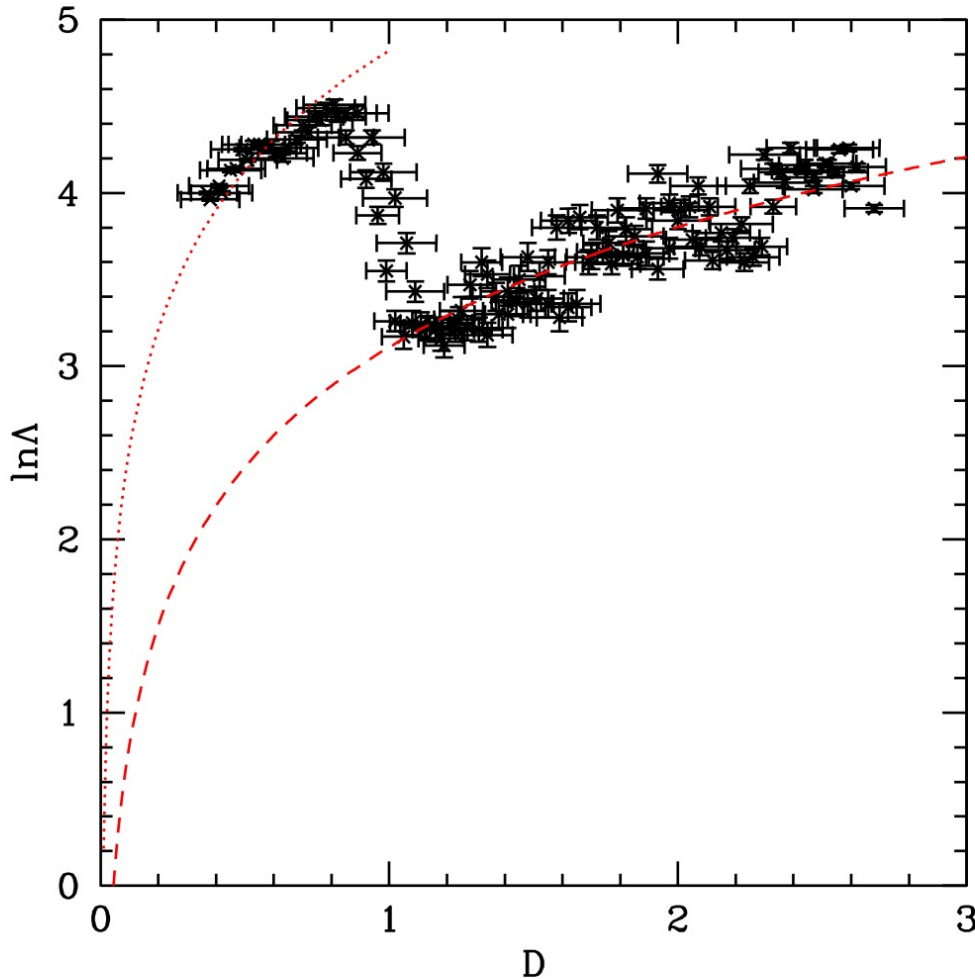
¿Funciona en simulaciones numéricas?

- SI !
- **PERO:** Algunas palabras de precaución:
 - Sólo aparece si el fondo de estrellas esta simulada "en vivo" (con partículas y no como fórmula de análisis).
 - En el caso de objetos pequeños (BHs, por ejemplo), está fuertemente influenciado por la resolución del código utilizado.

Límites de Resolución:



¿ $\ln\Lambda$ constante ?



NO

$\ln\Lambda$ disminuye si el objeto se acerca al centro. También es visible un cambio en la resolución.

¿ Masa constante ?

NO

Cúmulos de estrellas pierden masa cuando están espiralando hacia el centro.

PERO

La determinación de la masa que participa en el proceso de fricción dinámica todavía no está resuelto.

